

ESONERO DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z
Bari, 19 Novembre 2021
Traccia: 1

Esercizio 1. Stabilire con il principio di induzione se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{4}{5} \sum_{i=-1}^n \left(\frac{4}{5}\right)^i = 5 - 4 \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}.$$

Esercizio 2. Sia assegnata su \mathbb{Z} la relazione

$$\mathcal{R} = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists t \in \mathbb{Z} \text{ tale che } d = tc\},$$

ovvero $\forall c, d \in \mathbb{Z} \quad c \mathcal{R} d \iff \exists t \in \mathbb{Z} \text{ tale che } d = tc$. Stabilire se \mathcal{R} definisce una relazione di equivalenza o di ordine su \mathbb{Z} .

Esercizio 3. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$62x + 142y = 6.$$

Esercizio 4. Date tre proposizioni T , Q e P , scrivere la tabella di verità di $(T \wedge Q) \vee (\bar{T} \vee P)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists s \in \mathbb{Z} \quad \text{ed} \quad \exists c \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad 4c - t + 5s^2 = 0$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 5. Determinare se le seguenti funzioni

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad g(c) = \frac{2}{7}c^5 - \frac{3}{4}$$

e

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad h(s) = 5 - \frac{2}{3}s$$

sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ h$ e $h \circ g$ e le funzioni inverse g^{-1} e h^{-1} .

Esercizio 6. Si considerino 6 studenti di Biologia, 7 studenti di Farmacia e 8 studenti di Medicina. Tra gli studenti di Farmacia ci sono 4 Uomini, tra gli studenti di Medicina ci sono 6 Donne e gli studenti di Biologia sono tutte Donne.

- Stabilire in quanti modi diversi si può formare un comitato di 5 studenti.
- Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 studenti con un rappresentante per ogni materia.
- Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 studenti con un rappresentante per ogni materia ed esattamente un uomo.
- Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 studenti con un rappresentante per ogni materia ed almeno un uomo.

ESONERO DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z
Bari, 19 Novembre 2021
Traccia: A

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall d \in \mathbb{R} \quad h(d) = \frac{4}{3}d + 4$$

e

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad g(s) = \frac{5}{4} - \frac{5}{7}s^3$$

sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre determinare, ove possibile, le composizioni $g \circ h$ e $h \circ g$ e le funzioni inverse h^{-1} e g^{-1} .

Esercizio 2. Considerate tre proposizioni P , T e S , scrivere la tabella di verità di $(P \vee T) \wedge (\bar{P} \wedge S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\exists a \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall x \in \mathbb{Z} \quad \exists u \in \mathbb{R} \quad \text{con} \quad -u + 5x - 4a = 0$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 3. Si considerino 5 studenti di Ingegneria, 8 studenti di Chimica e 9 studenti di Fisica. Gli studenti di Ingegneria sono tutti Uomini, tra gli studenti di Chimica ci sono 3 Uomini e tra gli studenti di Fisica ci sono 7 Donne.

- Stabilire in quanti modi diversi si può formare un comitato di 6 studenti.
- Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 studenti con un rappresentante per ogni materia.
- Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 studenti con un rappresentante per ogni materia ed esattamente una donna.
- Stabilire in quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 studenti con un rappresentante per ogni materia ed almeno una donna.

Esercizio 4. Sia assegnata su \mathbb{Z} la relazione

$$\mathcal{R} = \{(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } s = kt\},$$

ovvero $\forall s, t \in \mathbb{Z} \quad s \mathcal{R} t \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } s = kt$. Stabilire se \mathcal{R} definisce una relazione di equivalenza o di ordine su \mathbb{Z} .

Esercizio 5. Applicando il principio di induzione stabilire se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{3}{4} \sum_{i=-1}^n \left(\frac{3}{4}\right)^i = 4 - 3 \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}.$$

Esercizio 6. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$51x + 174y = 6.$$