ESERCIZI DI GEOMETRIA 3

C.d.L Matematica - A. A. 2023-2024
30 Ottobre 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si determinino le equazioni della proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1-2]) = [2,1], \quad f([3,1]) = [5,2], \quad f([-2,1]) = [-1,1].$$

Esercizio 2. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si considerino i punti

$$P_1[1,1], \qquad P_2[1,2], \qquad P_3[1,0], \qquad P_4[3,1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(P_1) = P_3, \quad f(P_2) = P_4, \quad f(P_3) = P_1, \quad f(P_4) = P_2.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 3. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si determinino le equazioni della proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([2,1]) = [1,0], \quad f([-1,1]) = [0,1], \quad f([3,-2]) = [1,1].$$

Esercizio 4. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si considerino i punti

$$P_1[1,1], \qquad P_2[1,2], \qquad P_3[1,0], \qquad P_4[3,1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(P_1) = P_3, \quad f(P_2) = P_4, \quad f(P_3) = P_1, \quad f(P_4) = P_2.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f, classificarla e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 5. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1,0]) = [1,2], \quad f([1,2]) = [5,8] \quad f([2,1]) = [4,7].$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f, classificarla, determinare eventuali punti uniti e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 6. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1,1]) = [-3,7], \quad f([2,3]) = [-1,2] \quad f([0,1]) = [-3,4].$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f, classificarla, determinare eventuali punti uniti e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 7. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1,0]) = [1,-1], \quad f([0,1]) = [2,3] \quad f([1,1]) = [3,2].$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f, classificarla, determinare eventuali punti uniti e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 8. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino i punti

$$A = [0,0,0,1] \qquad B = [1,-1,0,0] \qquad C = [1,-1,0,1] \qquad D = [1,-1,0,2].$$

Si verifichi che i punti sono allineati su una retta r e si determini il birapporto. Sia s la retta passante per i punti $Q_1[1,0,2,0]$ e $Q_2[0,0,1,0]$. Stabilire se esiste una trasformazione proiettiva $f : r \to s$ tale che

$$f(A) = Q_1 \qquad f(B) = Q_2 \qquad f(C) = [1,0,3,0] \qquad f(D) = [0,0,1,0],$$

ed in caso affermativo determinarla.

Esercizio 9. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([0,1]) = [2, 1-k], \qquad f([1,2]) = [k-3, 2k-1], \qquad f([1,0]) = [k+1, 1].$$

Si determini per quali valori di k f ammette punti uniti e classificarla.

Esercizio 10. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Sia $k \in \mathbb{R} - \{0, 4\}$ e si consideri la proiettività $f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1,2]) = [k, 2k], \qquad f([0,1]) = [k-2, k-4], \qquad f([1,0]) = [-1, 0].$$

Si determini per quali valori di k, la trasformazione f ammette punti uniti e classificarla.

Esercizio 11. Si consideri la proiettività $f \colon \mathbb{R}P_1 \longrightarrow \mathbb{R}P_1$ tale che

$$f([1,0]) = [2k, -1], \qquad f([1,1]) = [6k+3, -1], \qquad f([2,-1]) = [-3, -2],$$

dove $k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}\}$. Determinare esplicitamente una tale proiettività e se ci sono valori di k per cui f ammette punti uniti.

Esercizio 12. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Sia $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e si consideri la proiettività $f \colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1,1]) = [2k+4, -2+4k], \qquad f([-2,1]) = [k+2, 2+2k], \qquad f([3,0]) = [0, -6].$$

Si determini la trasformazione f esplicitamente ed, inoltre, per quali valori di k, f ammette punti uniti e classificarla.