ESERCIZI DI GEOMETRIA 3

C.d.L Matematica - A. A. 2022-2023
2 Novembre 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Si considerino in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ il punto $Q[1, 0, 0, 1, 0]$ e la retta

$$r : \begin{cases} x_0 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Si determinino la dimensione e le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio proiettivo $r \vee \{Q\}$. Determinare le equazioni del sistema lineare di centro il sottospazio $r \vee \{Q\}$.

Esercizio 2. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x_0 - x_1 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_3 - x_0 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Stabilire se esiste un piano di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenente r e s.

Esercizio 3. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Si considerino in $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$ il punto $Q[-1, 1, 1, 1, 1]$, la retta r passante per i punti $A[-1, 2, 2, 2, 1]$ e $B[1, 0, 0, 0, 1]$ e il piano

$$\pi : \begin{cases} x_1 - x_0 = 0 \\ x_0 - x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Si determinino la dimensione e le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio proiettivo $\{Q\} \vee r \vee \pi$.

Esercizio 4. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si determinino le equazioni della proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1 - 2]) = [2, 1], \quad f([3, 1]) = [5, 2], \quad f([-2, 1]) = [-1, 1].$$

Esercizio 5. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si considerino i punti

$$P_1[1, 1], \qquad P_2[1, 2], \qquad P_3[1, 0], \qquad P_4[3, 1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(P_1) = P_3, \quad f(P_2) = P_4, \quad f(P_3) = P_1, \quad f(P_4) = P_2.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 6. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si determinino le equazioni della proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([2, 1]) = [1, 0], \quad f([-1, 1]) = [0, 1], \quad f([3, -2]) = [1, 1].$$