

ESERCIZI DI GEOMETRIA 3

C.d.L Matematica - A. A. 2023-2024
16 Ottobre 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si determinino equazioni parametriche e cartesiane della retta passante per i punti $A[0, 2, 0, 2]$ e $B[1, -1, 0, 1]$.

Esercizio 2. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino la retta r passante per i punti $A[2, 1, -1, 4]$ e $B[-1, 0, 3, 4]$, e la retta

$$s : \begin{cases} x_0 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

Stabilire se esiste un piano in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ contenente sia r che s .

Esercizio 3. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Si considerino i punti $A[0, 1, 0, 1, 1]$ e $B[1, k, -2, k, -1]$, con $k \in \mathbb{R}$, e la retta

$$r : \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_0 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Si determinino per quali valori di k esiste un unico iperpiano contenente r e passante per i punti A e B . In corrispondenza di tali valori, determinare la posizione reciproca tra la retta r e la retta passante per A e B .

Esercizio 4. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Si determinino equazioni parametriche e cartesiane dell'iperpiano H passante per il punto $[1, 0, 0, 0, 0]$ e contenente il piano

$$\pi : \begin{cases} x_0 + x_4 = 0 \\ 2x_0 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Si determinino inoltre un insieme P_1, P_2, \dots, P_k di punti proiettivamente indipendenti tali che $H = L(P_1, P_2, \dots, P_k)$.

Esercizio 5. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} 2x_0 - x_1 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_0 + x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

Si determini la retta incidente r ed s e passante per $P[1, 1, 2, 0]$.

Esercizio 6. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Si considerino il piano π e la retta r definiti da:

$$\pi : \begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_0 = 0, \end{cases} \quad r : \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_0 = 0, \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Si determinino la dimensione e le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio proiettivo $\pi \vee r$.