

ESERCIZI DI GEOMETRIA 3

C.d.L Matematica - A. A. 2022-2023

14 Novembre 2022

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r : x_0 = 0 \qquad s : x_1 = 0, \qquad t : x_1 + x_2 = 0,$$

ed i punti

$$A = [1, 1, 0], \qquad B = [1, -1, 0].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r, \quad f(s) = s, \quad f(t) = t, \quad f(A) = B.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 2. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r : x_0 - x_1 = 0, \qquad s : x_0 + x_1 = 0, \qquad t : x_0 = 0.$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(t) = s, \quad f(r) = Id_r.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 3. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r : x_0 = 0 \qquad s : x_1 = 0, \qquad r' : x_0 + x_1 = 0, \qquad s' : x_1 + x_2 = 0,$$

ed i punti

$$A[1, 1, 0], \qquad B[1, 1, 1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f(A) = B.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 4. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r_1 : x_1 = 0 \qquad r_2 : x_1 + x_2 = 0, \qquad r_3 : x_1 - x_2 = 0, \qquad t : x_0 = 0,$$

ed il punto

$$P[0, 1, 2].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r_1) = r_2, \quad f(r_2) = r_3, \quad f(t) = t, \quad f(P) = P.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 5. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r : x_1 = x_0 \qquad t : x_0 - x_1 + x_2 = 0, \qquad s : x_2 = 0,$$

ed i punti

$$A = [0, 0, 1], \quad B = [0, 1, 0], \quad C = [0, 1, 1], \quad D = [0, 1, -1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = s, \quad f(s) = t, \quad f(A) = B, \quad f(B) = C, \quad f(C) = D.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 6. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si considerino i punti

$$A[2, 1], \quad B[2, -1], \quad C[0, 1].$$

Si determini il quarto armonico.

Esercizio 7. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3]$. Si considerino i punti

$$P_1 = [0, 1, 0, 0], \quad P_2 = [0, 1, 1, 0], \quad P_3 = [0, 2, 1, 0].$$

Si verifichi che i punti sono allineati e si determini il quarto armonico.

Esercizio 8. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Si considerino i punti

$$P_1[1, 1], \quad P_2[1, 2], \quad P_3[1, 0], \quad P_4[3, 1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f(P_1) = P_3, \quad f(P_2) = P_4, \quad f(P_3) = P_1, \quad f(P_4) = P_2.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f , classificarla e stabilire se tale proiettività è unica.