ESERCIZI DI GEOMETRIA 3

C.d.L Matematica - A. A. 2023-2024
10 Novembre 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r: \ x_0 = 0 \qquad s: \ x_1 = 0, \qquad t: \ x_1 + x_2 = 0,$$

ed i punti

$$A = [1, 1, 0], \qquad B = [1, -1, 0].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r, \quad f(s) = s, \quad f(t) = t, \quad f(A) = B.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 2. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r: \ x_0 - x_1 = 0, \qquad s: \ x_0 + x_1 = 0, \qquad t: \ x_0 = 0.$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(t) = s, \quad f_{|r} = Id_r.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 3. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r: \ x_0 = 0 \qquad s: \ x_1 = 0, \qquad r': \ x_0 + x_1 = 0, \qquad s': \ x_1 + x_2 = 0,$$

ed i punti

$$A[1, 1, 0], \qquad B[1, 1, 1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r', \quad f(s) = s', \quad f(A) = B.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 4. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r_1: \ x_1 = 0 \qquad r_2: \ x_1 + x_2 = 0, \qquad r_3: \ x_1 - x_2 = 0, \qquad t: \ x_0 = 0,$$

ed il punto

$$P[0, 1, 2].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r_1) = r_2, \quad f(r_2) = r_3, \quad f(t) = t, \quad f(P) = P.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 5. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r: \; x_1 = x_0 \qquad\qquad t: \; x_0 - x_1 + x_2 = 0, \qquad\qquad s: \; x_2 = 0,$$

ed i punti

$$A = [0, 0, 1], \qquad B = [0, 1, 0], \qquad C = [0, 1, 1], \qquad D = [0, 1, -1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = s, \quad f(s) = t, \quad f(A) = B, \quad f(B) = C, \quad f(C) = D.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 6. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r: \; 2x_0 + x_1 + x_2 = 0 \qquad\qquad s: \; x_0 = 0,$$

ed i punti

$$A = [0, 1, 0] \qquad B = [1, -1, -1], \qquad C[1, 0, 0].$$

Si stabilisca se esiste una proiettività $f \colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = s, \quad f(s) = r, \quad f(A) = B, \quad f(B) = A, \quad f(C) = C.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale proiettività e stabilire se essa è unica.

Esercizio 7. Determinare le derivate parziali formali $\dfrac{\partial}{\partial x_1}$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_2}$ dei seguenti polinomi in $\mathbb{R}[x_1, x_2]$

$$f(x_1, x_2) = x_1^3$$
$$f(x_1, x_2) = 2x_2^2 + 4x_2^3$$
$$f(x_1, x_2) = -3x_1x_2 + 4x_2^3 + 5x_1^2x_2^3$$
$$f(x_1, x_2) = 4x_1x_2^4 - 3x_1^3x_2.$$