

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 5 Settembre 2023
(Programma dell’A.A. 2022/2023)

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r: x_1 - x_2 = 0, \quad s: x_1 + x_2 = 0, \quad t: x_2 = 0.$$

Si determini se esiste una proiettività $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(t) = s \quad \text{e} \quad f|_r = \text{Id}_r.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio euclideo 3-dimensionale \mathbb{E} in cui è fissato un riferimento cartesiano con coordinate (x, y, z) . Si consideri la quadrica affine \mathcal{Q} di equazione

$$\mathcal{Q}: y^2 - 2xz + 2x + 2z = 0.$$

- (a) Classificare \mathcal{Q} .
- (b) Determinare il centro di \mathcal{Q} .
- (c) Stabilire se la quadrica \mathcal{Q} è rotonda.

Esercizio 3. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) . Si consideri la curva algebrica \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C}: (x^2 + y^2 - 4x)(x - y) = 0.$$

- (a) Determinare eventuali intersezioni con gli assi, punti impropri, asintoti, punti singolari e relative molteplicità, tangenti principali nei punti singolari.
- (b) Si tracci un grafico approssimativo del supporto di \mathcal{C} .