PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 13 Aprile 2023
(Programma dell'A.A. 2022/2023)

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Sia $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e si consideri la proiettività $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1,1]) = [2k+4, -2+4k], \qquad f([-2,1]) = [k+2, 2+2k], \qquad f([3,0]) = [0,-6].$$

(a) Stabilire se la trasformazione f esiste ed è unica.
(b) Determinare la trasformazione f esplicitamente.
(b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ la trasformazione f ammette punti uniti e classificarla.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{A} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio affine reale 3-dimensionale $\mathbb{A}$ in cui è fissato un riferimento affine con coordinate (x, y, z). Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$\mathcal{Q}\colon\ (2k-3)x^2 - y^2 + (2k-3)z^2 + 2k^2xz + 2y + k + 2 = 0.$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la quadrica $\mathcal{Q}$ è un cilindro di vertice $P_\infty[0,1,0,1]$ e dire di che tipo di cilindro si tratta.

Esercizio 3. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento affine con coordinate (x, y). Si consideri la curva algebrica $\mathscr{C}$ di equazione

$$\mathscr{C}\colon\ 4x^2 - y^2 + y^3 = 0.$$

(a) Determinare eventuali intersezioni con gli assi, punti impropri, simmetrie, asintoti, punti singolari e relative molteplicità, tangenti principali nei punti singolari.
(b) Si tracci un grafico approssimativo del supporto di $\mathscr{C}$.

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 13 Aprile 2023
(Programmi antecedenti all'A.A. 2022/2023)

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Sia $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e si consideri la proiettività $f\colon \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1,1]) = [2k+4, -2+4k], \qquad f([-2,1]) = [k+2, 2+2k], \qquad f([3,0]) = [0,-6].$$

(a) Stabilire se la trasformazione f esiste ed è unica.
(b) Determinare la trasformazione f esplicitamente.
(b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ la trasformazione f ammette punti uniti e classificarla.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{A} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio affine reale 3-dimensionale $\mathbb{A}$ in cui è fissato un riferimento affine con coordinate (x, y, z). Sia $k \in \mathbb{R}$ e si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$\mathcal{Q}\colon\ (2k-3)x^2 - y^2 + (2k-3)z^2 + 2k^2xz + 2y + k + 2 = 0.$$

Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la quadrica $\mathcal{Q}$ è un cilindro di vertice $P_\infty[1,0,1,0]$ e dire di che tipo di cilindro si tratta.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di un piano euclideo $\mathbb{E}$ in cui è fissato un riferimento cartesiano di coordinate (x, y).
Si considerino la retta

$$r\colon x + y - 2 = 0,$$

il punto $A(1,1) \in r$ ed il punto $X_\infty[1,0,0]$.
Si determini un'equazione del fascio $\mathfrak{F}$ le cui coniche non degeneri sono parabole aventi r come diametro, passano per $A \in r$ e sono tali che r ha direzione coniugata X_∞.