

### PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 13 Febbraio 2023  
(Programma dell’A.A. 2022/2023)

**Esercizio 1.** In  $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate  $[x_0, x_1, x_2]$ . Si considerino le rette

$$r : 2x_0 + x_1 + x_2 = 0 \qquad s : x_0 = 0,$$

ed i punti

$$A = [0, 1, 0] \quad B = [1, -1, -1], \quad C[1, 0, 0].$$

Si stabilisca se esiste una proiettività  $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  tale che

$$f(r) = s, \quad f(s) = r, \quad f(A) = B, \quad f(B) = A, \quad f(C) = C.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale proiettività e stabilire se essa è unica.

**Esercizio 2.** Sia  $\mathbb{P} = \mathbb{A} \cup \pi_\infty$  il completamento proiettivo di uno spazio affine 3-dimensionale  $\mathbb{A}$  in cui è fissato un riferimento affine con coordinate  $(x, y, z)$ . Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , si classifichi la quadrica  $\mathcal{Q}$  di equazione

$$\mathcal{Q}: 2x^2 + 2xy + 2kxz + 2yz - k = 0.$$

**Esercizio 3.** In  $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ , sia fissato un riferimento affine con coordinate  $(x, y)$ . Si consideri la curva algebrica  $\mathcal{C}$  di equazione

$$\mathcal{C}: 2y^2 - (x + 2)^3 = 0.$$

- (a) Determinare eventuali intersezioni con gli assi, punti impropri, simmetrie, asintoti, punti singolari e relative molteplicità, tangenti principali nei punti singolari.
- (b) Si tracci un grafico approssimativo del supporto di  $\mathcal{C}$ .

## PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 13 Febbraio 2023  
(Programmi antecedenti all'A.A. 2022/2023)

**Esercizio 1.** Si consideri la proiettività  $f: \mathbb{R}P_1 \rightarrow \mathbb{R}P_1$  tale che

$$f([1, 0]) = [2k, -1], \quad f([1, 1]) = [6k + 3, -1], \quad f([2, -1]) = [-3, -2],$$

dove  $k \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}\}$ . Determinare esplicitamente una tale proiettività e se ci sono valori di  $k$  per cui  $f$  ammette punti uniti.

**Esercizio 2.** Sia  $\mathbb{P} = \mathbb{A} \cup \pi_\infty$  il completamento proiettivo di uno spazio affine 3-dimensionale  $\mathbb{A}$  in cui è fissato un riferimento affine con coordinate  $(x, y, z)$ . Al variare di  $k \in \mathbb{R}$ , si classifichi la quadrica  $\mathcal{Q}$  di equazione

$$\mathcal{Q}: 2x^2 + 2xy + 2kxz + 2yz - k = 0.$$

**Esercizio 3.** Sia  $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \pi_\infty$  il completamento proiettivo di un piano euclideo  $\mathbb{E}$  in cui è fissato un riferimento cartesiano di coordinate  $(x, y)$ .

- (a) Si scriva l'equazione della conica  $\mathcal{C}$  passante per il punto  $A(0, 1)$ , avente centro  $C(1, 0)$  e tangente in  $B(3, 0)$  alla retta  $x - 3 = 0$ .
- (b) Si classifichi  $\mathcal{C}$ .