

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 27 Gennaio 2023
(Programma dell’A.A. 2022/2023)

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 + 4x_0 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x_1 - 3x_0 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_0 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Si determinino

- le equazioni parametriche di r e s ;
- la dimensione, le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane del sottospazio proiettivo $r \vee s$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio euclideo 3-dimensionale \mathbb{E} in cui è fissato un riferimento cartesiano con coordinate (x, y, z) . Si consideri la quadrica \mathcal{Q} di equazione

$$\mathcal{Q}: 3ky^2 + z^2 + 4kxy + 2x = 0,$$

dove $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq \frac{1}{4}$. Sia $r = L(A, B)$ la retta passante per i punti $A[0, 0, 1, 0]$ e $B[1, 0, 0, 1]$. Si verifichi che, se r è esterna a \mathcal{Q} , quest’ultima è un iperboloido ellittico non rotondo.

Esercizio 3. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, sia fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) . Si consideri la curva algebrica \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C}: y^3 - 3y^2 - x^2 = 0.$$

- Determinare eventuali intersezioni con gli assi, punti impropri, simmetrie, asintoti, punti singolari e relative molteplicità, tangenti principali nei punti singolari.
- Si tracci un grafico approssimativo del supporto di $\mathcal{C}: y^3 - 3y^2 - x^2 = 0$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, dove è fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) .

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 27 Gennaio 2023
(Programmi antecedenti all'A.A. 2022/2023)

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^4(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 + 4x_0 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x_1 - 3x_0 = 0 \\ 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_0 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Si determinino

- (a) le equazioni parametriche di r e s ;
- (b) la dimensione, le equazioni parametriche e le equazioni cartesiane del sottospazio proiettivo $r \vee s$.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio euclideo 3-dimensionale \mathbb{E} in cui è fissato un riferimento cartesiano con coordinate (x, y, z) . Si consideri la quadrica \mathcal{Q} di equazione

$$\mathcal{Q}: 3ky^2 + z^2 + 4kxy + 2x = 0,$$

dove $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq \frac{1}{4}$. Sia $r = L(A, B)$ la retta passante per i punti $A[0, 1, 0, 0]$ e $B[0, 0, 1, 1]$ (nelle coordinate omogenee $[x, y, z, t]$). Si verifichi che, se r è esterna a \mathcal{Q} , quest'ultima è un iperboloide ellittico non rotondo.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \ell_\infty$ il completamento proiettivo di un piano euclideo \mathbb{E} in cui è fissato un riferimento cartesiano di coordinate (x, y) .

Si scriva l'equazione della parabola \mathcal{C} avente vertice $V(-2, -4)$ e passante per i punti $A(-2, 1)$ e $P_\infty[1, 2, 0]$.