

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 11 Gennaio 2023

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1]$. Sia $k \in \mathbb{R} - \{0, 4\}$ e si consideri la proiettività $f: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tale che

$$f([1, 2]) = [k, 2k], \quad f([0, 1]) = [k - 2, k - 4], \quad f([1, 0]) = [-1, 0].$$

Si determini per quali valori di k , la trasformazione f ammette punti uniti e classificarla.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio euclideo 3-dimensionale \mathbb{E} in cui è fissato un riferimento cartesiano con coordinate (x, y, z) . Si consideri la quadrica affine \mathcal{Q} di equazione

$$\mathcal{Q}: x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz + 2y = 0.$$

Classificare \mathcal{Q} e determinarne centro e piani principali.

Esercizio 3 (per programma dell'anno accademico 2022/2023). In $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) . Si consideri la curva algebrica \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C}: y^2(3 + x) + 2x(x + 2)^2 = 0.$$

- Determinare eventuali intersezioni con gli assi, punti impropri, simmetrie, asintoti, punti singolari e relative molteplicità, tangenti principali nei punti singolari.
- Si tracci un grafico approssimativo del supporto di \mathcal{C} .

Esercizio 4 (per programmi antecedenti all'anno accademico 2022/2023). Sia $\mathbb{P} = \mathbb{E} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di un piano euclideo \mathbb{E} in cui è fissato un riferimento cartesiano di coordinate (x, y) .

- Si scriva l'equazione della conica \mathcal{C} tangente nell'origine alla retta $y = 0$, avente centro $C(0, 3)$ e passante per $P(2, 3)$.
- Si classifichi \mathcal{C} .