

PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA 3

C. L. Matematica – 10 Gennaio 2024
(Programma dall’A.A. 2022/2023)

Esercizio 1. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, sia fissato un riferimento proiettivo con coordinate $[x_0, x_1, x_2]$. Si considerino le rette

$$r: x_1 - x_2 = 0 \qquad s: x_1 + x_2 = 0, \qquad t: 2x_0 - x_1 - x_2 = 0,$$

ed i punti

$$A = [0, 1, 0], \qquad B = [0, 0, 1].$$

Si determini se esiste una proiettività $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che

$$f(r) = r, \quad f(s) = s, \quad f(t) = t, \quad f(A) = B.$$

In caso affermativo, determinare esplicitamente una tale f e stabilire se tale proiettività è unica.

Esercizio 2. Sia $\mathbb{P} = \mathbb{A} \cup \pi_\infty$ il completamento proiettivo di uno spazio affine reale 3-dimensionale \mathbb{A} in cui è fissato un riferimento affine con coordinate (x, y, z) . Al variare di $k \in \mathbb{R}$, si consideri la quadrica \mathcal{Q} di equazione

$$\mathcal{Q}: 4x^2 + ky^2 + (1 - k)z^2 + 4kxy + 4x + 2ky = 0.$$

- (a) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la quadrica \mathcal{Q} è un ellissoide reale.
- (b) Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la quadrica \mathcal{Q} è degenera e classificare \mathcal{Q} in corrispondenza di tali valori.

Esercizio 3. In $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$, sia fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) . Si consideri la curva algebrica \mathcal{C} di equazione

$$\mathcal{C}: (x + 1)y^2 + x(x + 2)^2 = 0.$$

- (a) Determinare eventuali intersezioni con gli assi, punti impropri, simmetrie, asintoti, punti singolari e relative molteplicità, tangenti principali nei punti singolari.
- (b) Si tracci un grafico approssimativo del supporto di $\mathcal{C}: (x + 1)y^2 + x(x + 2)^2 = 0$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, dove è fissato un riferimento affine con coordinate (x, y) .