ESERCIZI DI MATEMATCA DISCRETA

ITPS- Corso B - A. A. 2023-2024
Donatella Iacono
30 Ottobre 2023 [1]

Esercizio 1. Si definisca la seguente relazione sull'insieme $A = \mathbb{R}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad a\mathscr{R}b \iff a = b^5,$$

ovvero

$$\mathscr{R} = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \mid \ a = b^5\}.$$

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, di equivalenza.

Esercizio 2. Sia A un insieme finito. Si definisca sull'insieme delle parti di A $\mathscr{P}(A)$ la seguente relazione

$$\forall X, Y \in \mathscr{P}(A) \qquad X\mathscr{R}Y \iff X \subseteq Y.$$

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, di equivalenza.

Esercizio 3. Sia A un insieme finito. Si definisca sull'insieme delle parti di A $\mathscr{P}(A)$ la seguente relazione

$$\forall X, Y \in \mathscr{P}(A) \qquad X\mathscr{R}Y \iff |X| = |Y|.$$

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, di equivalenza.

Esercizio 4. Sia A l'insieme delle rette del piano. Si definisca sull'insieme A la seguente relazione

$$\forall r, s \in A \qquad r\mathscr{R}s \iff r \text{ è perpendicolare ad } s.$$

ovvero

$$\mathscr{R} = \{(r,s) \in A \times A \ \mid \ r \text{ è perpendicolare a } s\}.$$

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, di equivalenza.

Esercizio 5. Sia assegnata su $\mathbb{N}$ la relazione:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a\mathscr{R}b \iff \exists x \in \mathbb{N} \ \text{ con } b = ax.$$

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, di equivalenza.

Esercizio 6. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\mathscr{R} = \{(z,w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \ zw \geq 0\},$$

ovvero

$$\forall z, w \in \mathbb{Z} \quad z\mathscr{R}w \iff \quad zw \geq 0.$$

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva, una relazione d'ordine parziale, una relazione di ordine totale, di equivalenza.

Esercizio 7. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a\,\mathscr{R}\,b \quad \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \ 3a + 8b = 11k$$

(ovvero$\mathscr{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } \ 3a + 8b = 11k\}$).

Verificare che $\mathscr{R}$ definisce una relazione di equivalenza su $\mathbb{Z}$ e determinare la classe di equivalenza di 0.

[1] Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

Esercizio 8. Si consideri su $\mathbb{Z}$ la seguente relazione

$$\forall c, d \in \mathbb{Z} \quad c \mathscr{R} d \iff \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 9c + 5d = 14h$$

(ovvero $\mathscr{R} = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 9c + 5d = 14h\}$).

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Se $\mathscr{R}$ è di equivalenza, determinare la classe di equivalenza di 1.

Esercizio 9. Sia assegnata sull'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ la relazione

$$\forall s, t \in \mathbb{Z} \quad s \mathscr{R} t \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 7t + 9s = 16k$$

(ovvero $\mathscr{R} = \{(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 7t + 9s = 16k\}$).

Determinare se $\mathscr{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Se $\mathscr{R}$ è di equivalenza, determinare la classe di equivalenza di 0.