

ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

ITPS- Corso B - A. A. 2021-2022
26 Ottobre 2021 ¹

Esercizio 1. Si definisca la seguente relazione sull'insieme $A = \mathbb{R}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \mathcal{R} b \iff a = b^5$$

\mathcal{R} è una relazione Riflessiva? Antisimmetrica? Simmetrica? Transitiva? È una relazione d'ordine parziale? È una relazione di equivalenza?

Esercizio 2. Sia A un insieme finito. Si definisca sull'insieme delle parti di A $\mathcal{P}(A)$ la seguente relazione

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) \quad X \mathcal{R} Y \iff X \subseteq Y.$$

\mathcal{R} è una relazione Riflessiva? Simmetrica? Antisimmetrica? Transitiva? È una relazione d'ordine parziale? È una relazione di equivalenza?

Esercizio 3. Sia A un insieme finito. Si definisca sull'insieme delle parti di A $\mathcal{P}(A)$ la seguente relazione

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(A) \quad X \mathcal{R} Y \iff |X| = |Y|.$$

\mathcal{R} è una relazione Riflessiva? Antisimmetrica? Simmetrica? Transitiva? È una relazione d'ordine parziale? È una relazione di equivalenza?

Esercizio 4. Sia A l'insieme delle rette del piano. Si definisca sull'insieme A la seguente relazione

$$\forall r, s \in A \quad r \mathcal{R} s \iff r \text{ è parallela ad } s.$$

\mathcal{R} è una relazione Riflessiva? Antisimmetrica? Simmetrica? Transitiva? È una relazione d'ordine parziale? È una relazione di equivalenza?

Esercizio 5. Sia A l'insieme delle rette del piano. Si definisca sull'insieme A la seguente relazione

$$\forall r, s \in A \quad r \mathcal{R} s \iff r \text{ è perpendicolare ad } s.$$

\mathcal{R} è una relazione Riflessiva? Antisimmetrica? Simmetrica? Transitiva? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine parziale?

Esercizio 6. Si consideri la relazione su $A = \mathbb{Z}$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \mathcal{R} b \iff a - b \text{ pari.}$$

\mathcal{R} è una relazione Riflessiva? Antisimmetrica? Simmetrica? Transitiva? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine parziale?

Esercizio 7. Sia assegnata su \mathbb{N} la relazione:

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a \mathcal{R} b \iff \exists x \in \mathbb{N} \text{ con } b = ax$$

\mathcal{R} è una relazione Riflessiva? Antisimmetrica? Simmetrica? Transitiva? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine parziale?

¹Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

Esercizio 8. Sia assegnata su \mathbb{Z} la relazione

$$\mathcal{R} = \{(z, w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid zw \leq 0\},$$

\mathcal{R} è una relazione Riflessiva? Antisimmetrica? Simmetrica? Transitiva? È una relazione di equivalenza? È una relazione d'ordine parziale?

Esercizio 9. Sia assegnata su \mathbb{Z} la relazione

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a \mathcal{R} b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 3a + 8b = 11k$$

(ovvero $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 3a + 8b = 11k\}$).

Verificare che \mathcal{R} definisce una relazione di equivalenza su \mathbb{Z} e determinare la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 10. Sia assegnata su \mathbb{Z} la relazione

$$\forall c, b \in \mathbb{Z} \quad c \mathcal{R} b \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 4c + 7b = 11k$$

(ovvero $\mathcal{R} = \{(c, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 4c + 7b = 11k\}$).

Verificare che \mathcal{R} definisce una relazione di equivalenza su \mathbb{Z} e determinare la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 11. Si consideri su \mathbb{Z} la seguente relazione

$$\forall c, d \in \mathbb{Z} \quad c \mathcal{R} d \iff \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 9c + 5d = 14h$$

(ovvero $\mathcal{R} = \{(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists h \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 9c + 5d = 14h\}$).

Determinare se \mathcal{R} definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su \mathbb{Z} . Se \mathcal{R} è di equivalenza, determinare la classe di equivalenza di 1.

Esercizio 12. Sia assegnata sull'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} la relazione

$$\forall s, t \in \mathbb{Z} \quad s \mathcal{R} t \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 7t + 9s = 16k$$

(ovvero $\mathcal{R} = \{(s, t) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } 7t + 9s = 16k\}$).

Determinare se \mathcal{R} definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su \mathbb{Z} . Se \mathcal{R} è di equivalenza, determinare la classe di equivalenza di 0.