

ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

ITPS- Corso B - A. A. 2023-2024

Donatella Iacono

23 Novembre 2023 ¹

Esercizio 1. Si definisca sull'insieme \mathbb{Z} la seguente operazione $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x * y = xy + x.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 2. Si definisca sull'insieme \mathbb{Z} la seguente operazione $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x * y = 2xy + x + y.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme \mathbb{Z} la seguente operazione $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x * y = 4xy - 5x.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme \mathbb{Q} la seguente operazione $*$: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{Q} \quad x * y = -xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 5. Sia assegnata sull'insieme \mathbb{Z} , la seguente operazione $*$: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a * b = ab - a - b + 3.$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 6. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la seguente operazione \cdot : $A \times A \rightarrow A$, tale che

$$\forall (x, y), (z, t) \in A \quad (x, y) \cdot (z, t) = (xz, yt).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

¹Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

Esercizio 7. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $*$: $A \times A \rightarrow A$, tale che

$$\forall (x, y), (z, t) \in A \quad (x, y) * (z, t) = (x + z, yt).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 8. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $*$: $A \times A \rightarrow A$, tale che

$$\forall (a, x), (t, z) \in A \quad (a, x) * (t, z) = (3at, x + 2 + z).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 9. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la seguente operazione $*$: $A \times A \rightarrow A$, tale che

$$\forall (a, x), (t, z) \in A \quad (a, x) * (t, z) = (t + a, 2xz).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
- (2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
- (3) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.