ESERCIZI DI MATEMATCA DISCRETA

ITPS- Corso B - A. A. 2021-2022
22 Novembre 2021 [1]

Esercizio 1. Si definisca sull'insieme $\mathbb{Z}$ la seguente operazione $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Z} \qquad x * y = xy + x.$$

(1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
(2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
(3) Stabilire se $(\mathbb{Z}, *)$ è un monoide o no.

Esercizio 2. Si definisca sull'insieme $\mathbb{Z}$ la seguente operazione $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Z} \qquad x * y = 2xy + x + y.$$

(1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
(2) Determinare l'eventuale elemento neutro.
(3) Stabilire se $(\mathbb{Z}, *)$ è un monoide o no.

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}$ la seguente operazione $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Z} \qquad x * y = 4xy - 5x.$$

(1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.

Esercizio 4. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tale che

$$\forall\ x, y \in \mathbb{Q} \qquad x * y = -xy + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y.$$

(1) Determinare se l'operazione e' associativa e commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{Q}, *)$.

Esercizio 5. Sia assegnata sull'insieme $\mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, tale che

$$\forall\ a, b \in \mathbb{Z} \qquad a * b = ab - a - b + 3.$$

(1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.

Esercizio 6. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la seguente operazione $+ : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, y), (z, t) \in A \qquad (x, y) + (z, t) = (x + z, y + t).$$

Mostrare che $(A, +)$ è un monoide commutativo.

Esercizio 7. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la seguente operazione $\cdot : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, y), (z, t) \in A \qquad (x, y) \cdot (z, t) = (xz, yt).$$

[1]Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

(1) Determinare se esiste l'elemento neutro.
(2) Determinare se $(A, \cdot)$ è un monoide commutativo.

Esercizio 8. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che
$$\forall\ (x, y), (z, t) \in A \qquad (x, y) * (z, t) = (x + z, yt).$$
(1) Determinare se l'operazione $*$ verifica la proprietà associativa e commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.

Esercizio 9. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che
$$\forall\ (a, x), (t, z) \in A \qquad (a, x) * (t, z) = (3at, x + 2 + z).$$
a) Stabilire se l'operazione $*$ verifica la proprietà associativa e commutativa.
b) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.

Esercizio 10. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che
$$\forall\ (a, x), (t, z) \in A \qquad (a, x) * (t, z) = (a + t, 2xz).$$
a) Stabilire se l'operazione $*$ verifica la proprietà associativa e commutativa.
b) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.

Esercizio 11. (Esercizio extra) Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che
$$\forall\ (a, b), (c, d) \in A \qquad (a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$
(1) Stabilire se l'operazione è associativa, commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.