ESERCIZI DI MATEMATCA DISCRETA

ITPS- Corso B - A. A. 2021-2022
19 Ottobre 2021 [1]

Esercizio 1. Date tre proposizioni P, Q ed R, scrivere la tabella di verità di $(P \longrightarrow Q) \vee R$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \exists\, b \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \qquad 5zb^2 + a - 4bz^2 = a.$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 2. Date tre proposizioni P, Q ed R, scrivere la tabella di verità di $(P \vee Q) \longrightarrow R$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad \exists\, u \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall t \in \mathbb{Z} \quad \text{si ha} \qquad -11u^2t^2 - 2v = u^3t^3 - 2v.$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 3. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Esercizio 4. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 5. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Esercizio 6. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 + 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Esercizio 7. Dimostrare col principio di induzione che per ogni fisato $q \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$q^0 + q^1 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Esercizio 8. Verificare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & 1 \\ a_n = & a_{n-1} + 2n + 1 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_n$ con $b_n = (n+1)^2$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 9. Verificare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{b_n\}_n = \begin{cases} b_0 = & 1 \\ b_n = & b_{n-1} + 2 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{a_n\}_n$ con $a_n = 2n + 1$ per ogni $n \geq 0$.

[1] Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

Esercizio 10. Verificare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & 0 \\ a_n = & a_{n-1} + n \quad n > 0. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 11. Verificare che la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & 1 \\ a_n = & 2 \cdot a_{n-1} \quad n > 0. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $b_n = 2^n$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 12. Verificare che la seguente successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_n = \begin{cases} a_0 = & \frac{1}{3} \\ a_n = & a_{n-1} + n(n+1) + \frac{1}{3} \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_n$ con $b_n = \frac{1}{3}(n+1)^3$, per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 13. Dimostrare che $\forall\ n \geq 0$, si ha

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Esercizio 14. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{3^{n+1}-1}{4}.$$

Esercizio 15. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{i=0}^{n+1} \frac{3}{(2+i)} \frac{1}{(3+i)} = \frac{n+1}{n+4} + \frac{1}{2}.$$

Esercizio 16. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{(2+i)(3+i)} = \frac{n+1}{3(n+4)}.$$

Esercizio 17. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=-1}^{n+1} 3i^3 = \frac{3}{4}\left((n+1)^2(n+2)^2 - 4\right).$$

Esercizio 18. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=-1}^{n+1} (3i+1) = \frac{3}{2}\left((n+1)(n+2)\right) + n.$$

Esercizio 19. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=-1}^{n+1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^{n+1}}\right).$$

Esercizio 20. Dimostrare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{i=-2}^{n} 2i = n^2 + n - 6.$$