

ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

Informatica, Corso A-L, A. A. 2024-2025
Donatella Iacono
17 Ottobre 2024 ¹

Esercizio 1. Date le seguenti funzioni

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad g(n) = \frac{1-n}{2n+2},$$

e

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \forall z \in \mathbb{Q} \quad f(z) = \frac{7}{5}z + 11$$

stabilire se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse f^{-1} e g^{-1} , e le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 2. Determinare se le seguenti funzioni

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{5}t^5$$

e

$$h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \quad h(c) = 4 - 2c^2$$

sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ h$ e $h \circ g$ e le funzioni inverse h^{-1} e g^{-1} .

Esercizio 3. Date le seguenti funzioni

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q} \quad \forall a \in \mathbb{Q} \quad f(a) = \frac{3}{4}a - 2,$$

e

$$g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad g(n) = \frac{2n-3}{3n+1}$$

stabilire se sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le funzioni inverse f^{-1} , g^{-1} , e le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$.

Esercizio 4. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 + 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 5. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Esercizio 6. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$0 + 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Esercizio 7. Dimostrare col principio di induzione che per ogni fisato $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$q^0 + q^1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Esercizio 8. Dimostrare col principio di induzione che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2^0 + 2^1 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

¹Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.