

## ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

ITPS- Corso B - A. A. 2021-2022  
16 Dicembre 2021 <sup>1</sup>

**Esercizio 1.** Stabilire se esiste un grafo con 12 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 3 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnarne due non isomorfi.

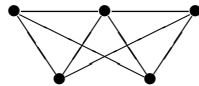
**Esercizio 2.** (1) Stabilire se esiste un albero con 14 vertici, dei quali: 3 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

(2) Stabilire se esiste un grafo con 14 vertici, dei quali: 3 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

**Esercizio 3.** (1) Stabilire se esiste un albero con 18 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 2 di grado 4, 1 di grado 3, 4 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

(2) Stabilire se esiste un grafo con 18 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 2 di grado 4, 1 di grado 3, 4 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

**Esercizio 4.** Sia  $\mathcal{G}$  il grafo seguente.



- (1) Stabilire se il grafo  $\mathcal{G}$  è planare, bipartito e determinare la valenza dei suoi vertici.
- (2) Stabilire se il grafo  $\mathcal{G}$  ammette cammini euleriani, circuiti euleriani, cammini hamiltoniani.
- (3) Stabilire se esiste un albero con lo stesso numero di vertici e le stesse valenze.

**Esercizio 5.** Siano  $D \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  e  $C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  le seguenti matrici

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Calcolare, se possibile,  $CD$  e  $DC$ .
- (2) Calcolare, se possibile, il determinante di  $D$  e di  $C$ .
- (3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di  $D$  e di  $C$ .

**Esercizio 6.** Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 11x \equiv 9 & (\text{mod } 8) \\ 71x \equiv 142 & (\text{mod } 7) \\ 88x \equiv 3 & (\text{mod } 5). \end{cases}$$

<sup>1</sup>Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

**Esercizio 7.** In  $S_{10}$ , sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 9 & 4 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

- (1) Descrivere l'elemento  $g$  come prodotto di cicli disgiunti.
- (2) Individuare l'ordine di  $g$  nel gruppo  $S_{10}$ .
- (3) Determinare esplicitamente l'inverso di  $g$ .
- (4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da  $g$ .
- (5) Indicare se l'elemento  $g$  è pari o dispari.

**Esercizio 8.** Sia assegnata sull'insieme  $\mathbb{R}$  la seguente operazione  $*$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = 3xy + x + y - 2.$$

- (1) Verificare che l'operazione è associativa e commutativa.
- (2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica  $(\mathbb{R}, *)$ .
- (3) Determinare, se esiste, l'inverso di ogni elemento in  $(\mathbb{R}, *)$ .

**Esercizio 9.** Stabilire con il principio di induzione se è vero che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\sum_{i=-1}^n \left(\frac{7}{8}\right)^i = 8 \left(\frac{8}{7} - \left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right).$$

**Esercizio 10.** Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$33x + 120y = 9.$$

**Esercizio 11.** Determinare se le seguenti funzioni

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \frac{1}{3} - \frac{4}{5}t^5$$

e

$$h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall c \in \mathbb{Z} \quad h(c) = 4 - 2c^2$$

sono iniettive, suriettive o biiettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni  $g \circ h$  e  $h \circ g$  e le funzioni inverse  $h^{-1}$  e  $g^{-1}$ .