

## ESERCIZI DI MATEMATICA DISCRETA

ITPS- Corso B - A. A. 2023-2024  
Donatella Iacono  
1 Dicembre 2023 <sup>1</sup>

**Esercizio 1.** In  $S_{10}$ , sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 8 & 7 & 6 & 9 & 4 & 3 & 5 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

- (1) Descrivere l'elemento  $g$  come prodotto di cicli disgiunti.
- (2) Individuare l'ordine di  $g$  nel gruppo  $S_{10}$ .
- (3) Determinare esplicitamente l'inverso di  $g$ .
- (4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da  $g$ .
- (5) Indicare se l'elemento  $g$  è pari o dispari.

**Esercizio 2.** Sia assegnata sull'insieme  $\mathbb{R}$  la seguente operazione  $*$  :  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad x * y = 3xy + x + y - 2.$$

- (1) Verificare che l'operazione  $e'$  associativa e commutativa.
- (2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica  $(\mathbb{R}, *)$ .
- (3) Determinare, se esiste, l'inverso di ogni elemento in  $(\mathbb{R}, *)$ .

**Esercizio 3.** Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 24x \equiv 6 & (\text{mod } 21) \\ 21x \equiv 3 & (\text{mod } 18) \\ 22x \equiv 6 & (\text{mod } 5). \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Stabilire con una dimostrazione se le seguenti congruenze sono vere o false:

$$35^{17} \equiv 35 \pmod{48} \quad 16^{43} \equiv 1 \pmod{49}.$$

**Esercizio 5.** Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$33x + 120y = 9.$$

**Esercizio 6.** Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$136x + 312y = 16.$$

---

<sup>1</sup>Nonostante l'impegno, errori, sviste imprecisioni sono sempre possibili, la loro segnalazione è molto apprezzata.

**Esercizio 7.** Sia assegnata su  $\mathbb{Z}$  la relazione

$$\mathcal{R} = \{(y, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 5 \mid d - y\},$$

(ovvero  $\forall y, d \in \mathbb{Z} \quad y \mathcal{R} d \iff 5 \mid d - y \iff \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tale che } d - y = 5k$ ). Stabilire se  $\mathcal{R}$  definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su  $\mathbb{Z}$ . Se è di equivalenza, scrivere la classe di equivalenza di 1.

**Esercizio 8.** Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\sum_{i=-1}^n \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

**Esercizio 9.** Si considerino 5 Francesi, 7 Austriaci e 6 Norvegesi. I Norvegesi sono tutte Donne, tra i Francesi ci sono 3 Donne e tra gli Austriaci ci sono 4 Donne.

- a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 4 persone?
- b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni nazionalità?
- c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
- d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato con un rappresentate per ogni nazionalità ed almeno un uomo?