Commissione Italiana per l'Insegnamento della Matematica
Commissione Permanente dell'Unione Matematica Italiana
UMI - CIIM

Matematica e Computer Graphics

XXXIV CONVEGNO UMI-CIIM
Bari, 6-8 Ottobre 2017

Donatella Iacono
Sabina Milella

dov'è la differenza?

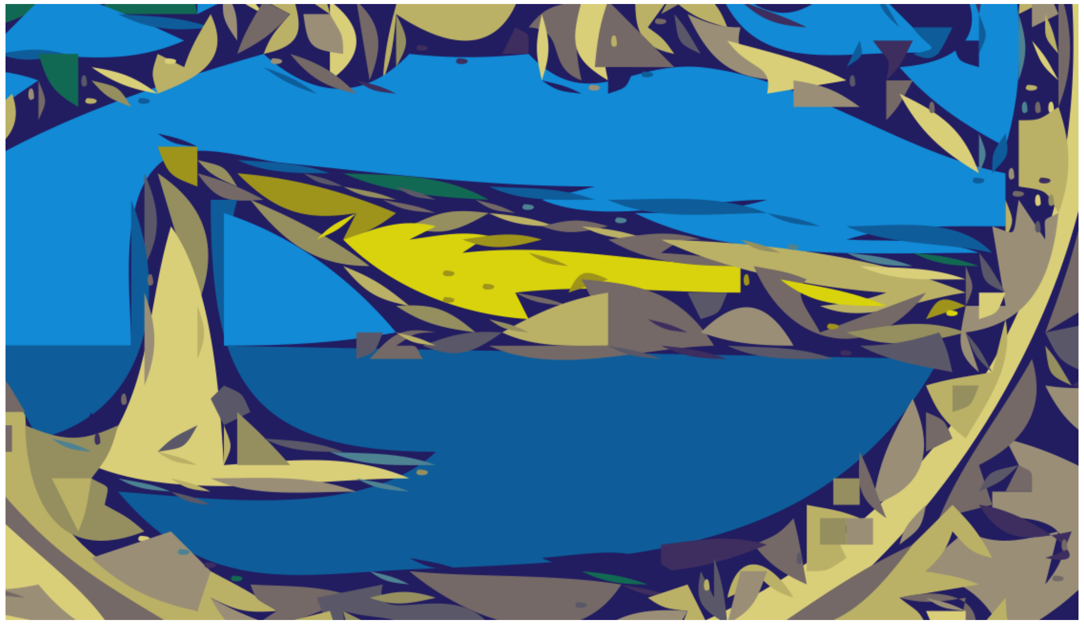
dov'è la differenza?

La prima è una immagine **raster**, la seconda è una immagine **vettoriale**

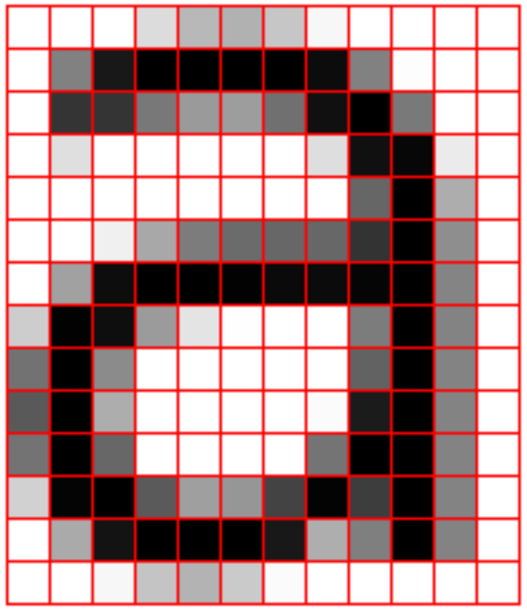
VETTORIALE VS RASTER

dov’è la differenza?

VETTORIALE VS RASTER



La prima è una immagine **raster**, la seconda è una immagine **vettoriale** a



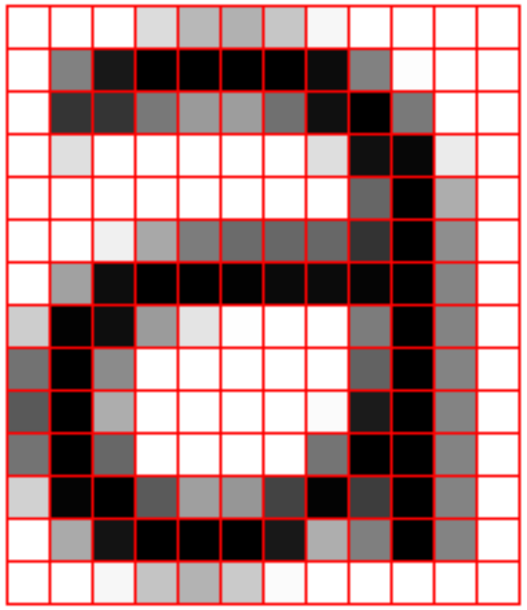
1.0	1.0	1.0	0.9	0.6	0.6	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0	1.0
1.0	0.2	0.2	0.5	0.6	0.6	0.5	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0
1.0	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	0.0	0.0	0.9	1.0
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.0	0.5	1.0
1.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0
0.9	0.0	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
0.5	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
0.5	0.0	0.7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.5	1.0
0.6	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.0	0.5	1.0
0.9	0.1	0.0	0.6	0.7	0.7	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	1.0
1.0	0.7	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	0.9	0.8	0.0	0.5	1.0
1.0	1.0	1.0	0.8	0.8	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

Grafica raster ⟷ PIXEL

Non vediamo immagini, ma schemi di numeri

Le immagini raster sono MATRICI. Ogni numerino corrisponde al COLORE che il pixel assume nel punto, nel sistema RGB o RYB.

a



1.0	1.0	1.0	0.9	0.6	0.6	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
1.0	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0	1.0
1.0	0.2	0.2	0.5	0.6	0.6	0.5	0.0	0.0	0.5	1.0	1.0
1.0	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9	0.0	0.0	0.9	1.0
1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
1.0	1.0	1.0	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.4	0.0	0.5	1.0
1.0	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.5	1.0
0.9	0.0	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
0.5	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.5	1.0
0.5	0.0	0.7	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.5	1.0
0.6	0.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.5	0.0	0.0	0.5	1.0
0.9	0.1	0.0	0.6	0.7	0.7	0.5	0.0	0.5	0.0	0.5	1.0
1.0	0.7	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1	0.9	0.8	0.0	0.5	1.0
1.0	1.0	1.0	0.8	0.8	0.9	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

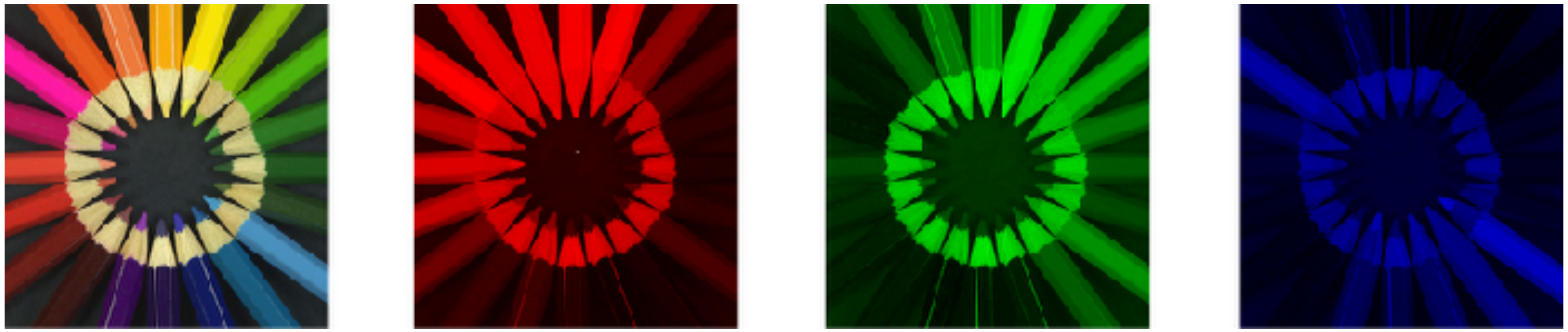
immagine in bianco e nero = una matrice

immagine in scala di grigi = una matrice

Immagine a colori = 3 matrici

RGB = Red+Green+Blue
RYB= Red+Yellow+Blue
…

LO SPAZIO DEI COLORI



R G B

- Ad ogni componente (colore) corrisponde una matrice
- La media aritmetica delle 3 matrici è la matrice scala di grigi
- Gli effetti di transizione da una immagine (matrice A) ad un'altra (matrice B) corrispondono a

$tA+(1-t)B$ al variare di t tra 0 e 1

in matematica è un SEGMENTO!

Utilizzo: loghi, fotografie, …

Vantaggi

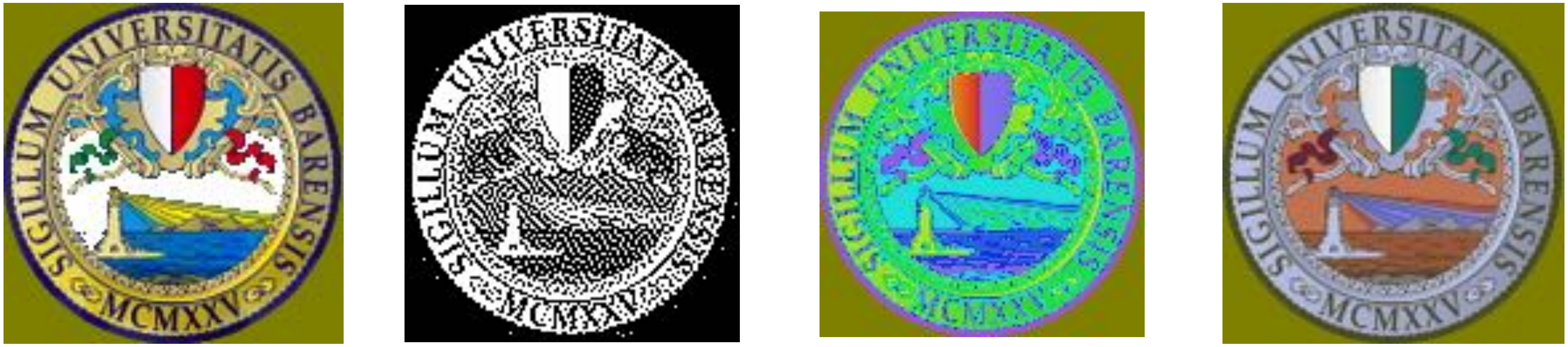
- è possibile modificare i colori con precisione
- esistono vari tipi di filtri (puntuale, locale, globale)
- compatibilità tra diverse estensioni (bmp, jpeg, gif, tiff, png)

IMMAGINI RASTER

Utilizzo: loghi, fotografie, …

Vantaggi

- è possibile modificare i colori con precisione
- esistono vari tipi di filtri (puntuale, locale, globale)
- compatibilità tra diverse estensioni (bmp, jpeg, gif, tiff, png)



Utilizzo: loghi, fotografie, …

Vantaggi

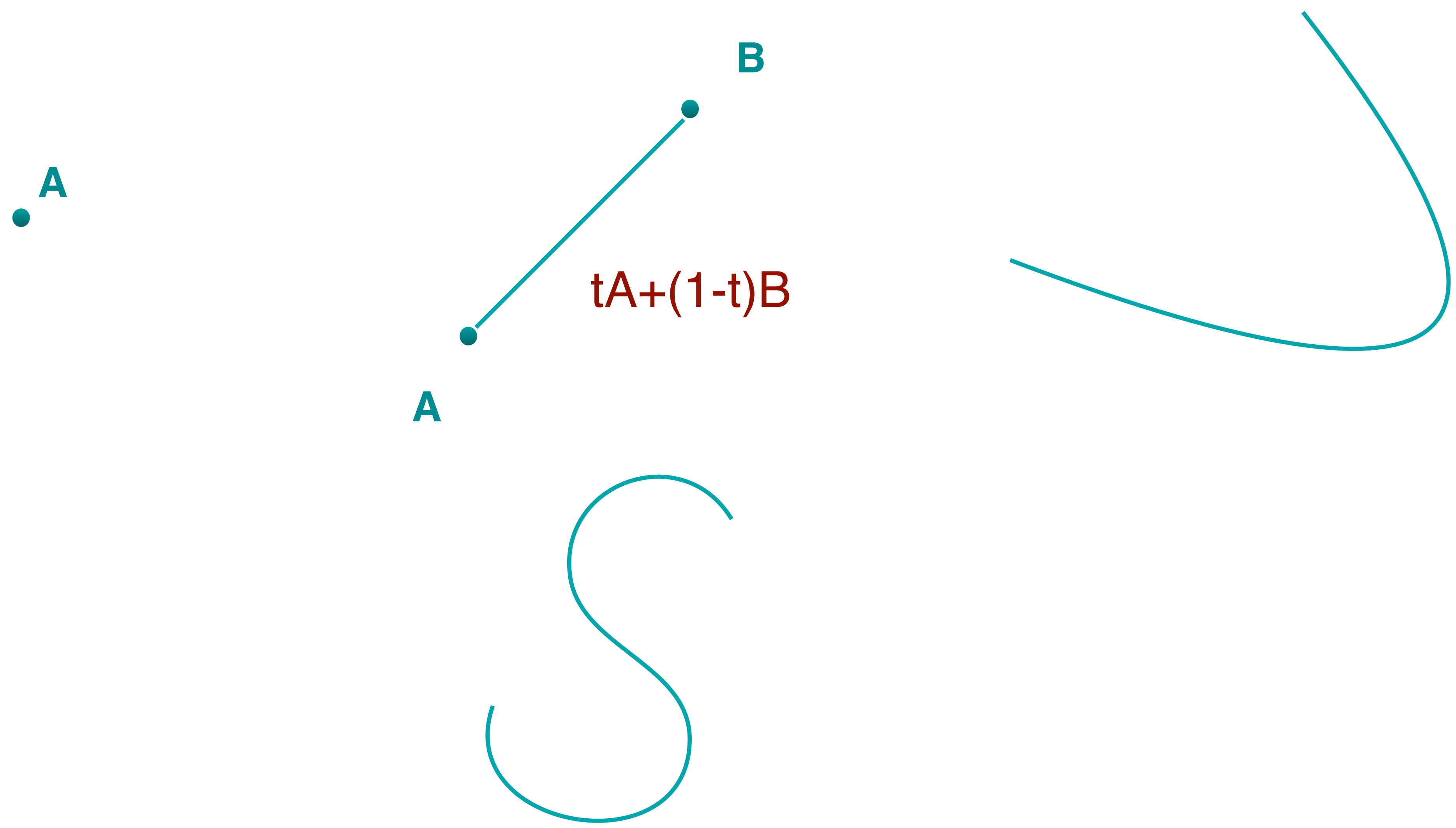
- è possibile modificare i colori con precisione
- esistono vari tipi di filtri (puntuale, locale, globale)
- compatibilità tra diverse estensioni (bmp, jpeg, gif, tiff, png)

Svantaggi

- effetto sgranato con l'ingrandimento (effetto pixel)
- le immagini con molti dettagli sono molto pesanti

IMMAGINI VETTORIALI

Le immagini vettoriali sono costituite da punti, poligoni e curve definite da formule matematiche.



Utilizzo: icone, font, illustrazioni

Vantaggi

- qualità dell’immagine indipendente dalla risoluzione
- file leggeri

IMMAGINI VETTORIALI

Utilizzo: icone, font, illustrazioni

Vantaggi

- qualità dell'immagine indipendente dalla risoluzione
- file leggeri

Svantaggi

- pochi filtri ed effetti
- poca compatibilità tra i file usati da programmi diversi (eps, pdf, cgm, svg)
- software non molto intuitivi
- potenza di calcolo elevata

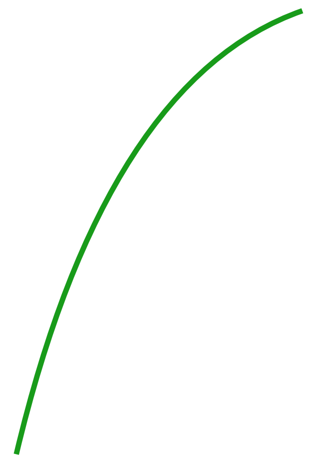
L’utilizzo di punti, poligoni e curve definite da formule matematiche, non si limita

alle immagini vettoriali….

L’utilizzo di punti, poligoni e curve definite da formule matematiche, non si limita

alle immagini vettoriali….

Cosa hanno in comune:



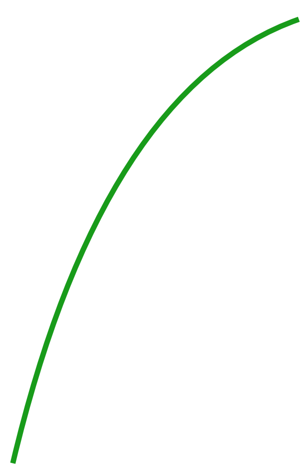
Filo d’erba

IMMAGINI VETTORIALI

L’utilizzo di punti, poligoni e curve definite da formule matematiche, non si limita

alle immagini vettoriali….

Cosa hanno in comune:



Filo d’erba

D

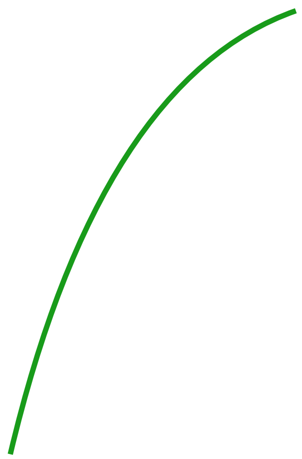
Font

IMMAGINI VETTORIALI

L’utilizzo di punti, poligoni e curve definite da formule matematiche, non si limita

alle immagini vettoriali….

Cosa hanno in comune:



D

Filo d’erba

Font

Cartoni animati

https://www.pixar.com/feature-films/toy-story#toy-story-1

Primo lungometraggio animato interamente realizzato in computer graphic

1996: Winner of Special Achievement Award "for his inspired leadership of the Pixar Toy Story team, resulting in the first feature-length computer-animated film": John Lasseter

Cartoni animati

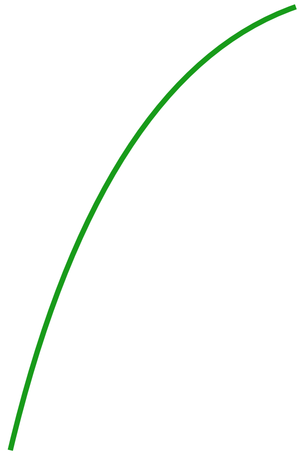
https://www.pixar.com/feature-films/toy-story#toy-story-1

CURVE DI BÉZIER

L'utilizzo di punti, poligoni e curve definite da formule matematiche, non si limita

alle immagini vettoriali….

Cosa hanno in comune: le curve di Bézier!



D

Filo d'erba

Font

Cartoni animati

https://www.pixar.com/feature-films/toy-story#toy-story-1

Anni ’60:

- Paul de Casteljau, lavorava alla Citroën
- Pierre Étienne Bézier, lavorava alla Renault

Anni ’60:

- Paul de Casteljau, lavorava alla Citroën
- Pierre Étienne Bézier, lavorava alla Renault

Obiettivo: disegnare curve per l’industria automobilistica

Anni ’60:

- Paul de Casteljau, lavorava alla Citroën
- Pierre Étienne Bézier, lavorava alla Renault

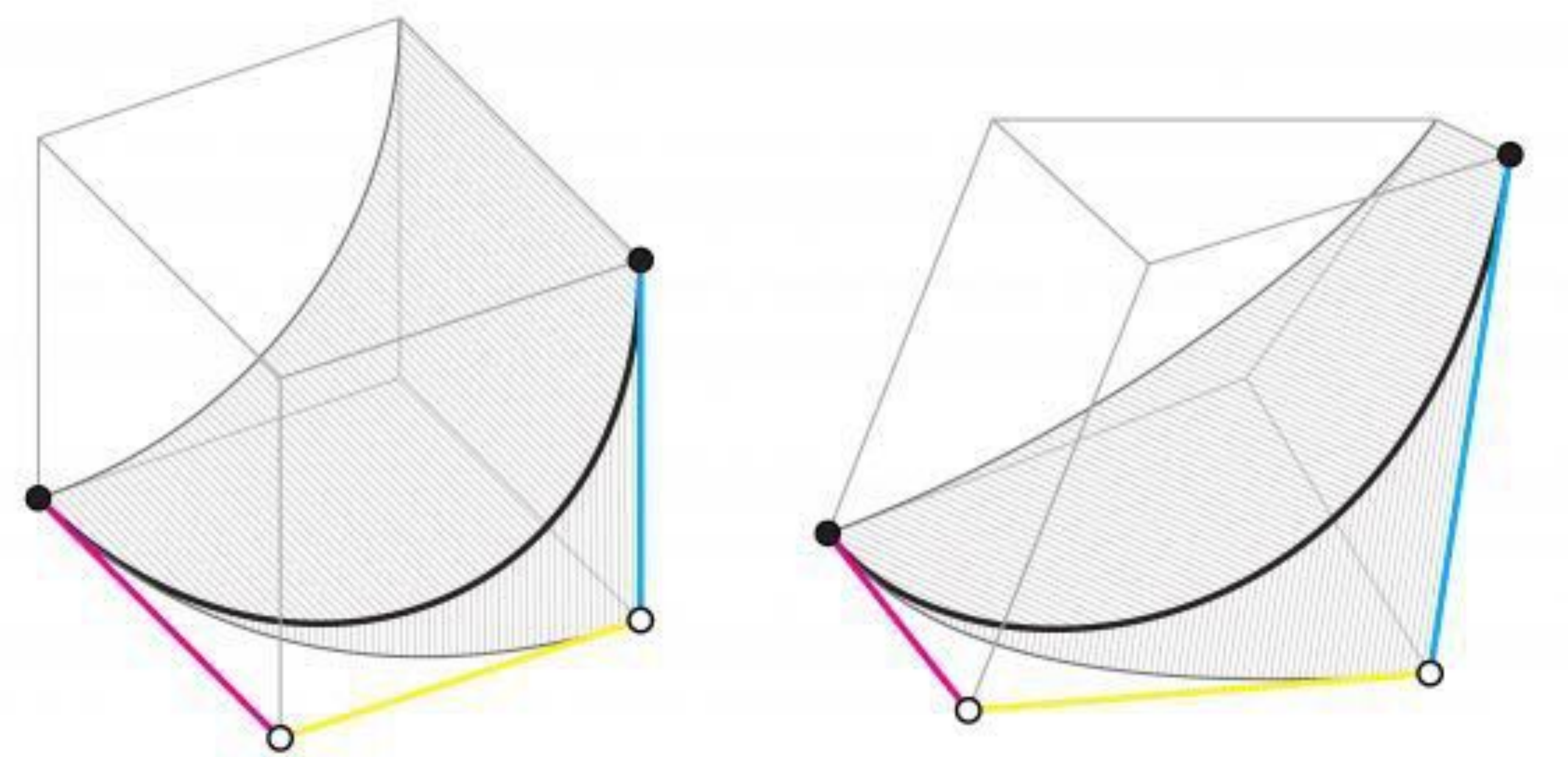
Obiettivo: disegnare curve per l’industria automobilistica

- Precisione
- Riproduzione
- Cambiamento

Anni ’60:

- Paul de Casteljau, lavorava alla Citroën
- Pierre Étienne Bézier, lavorava alla Renault

Obiettivo: disegnare curve per l’industria automobilistica

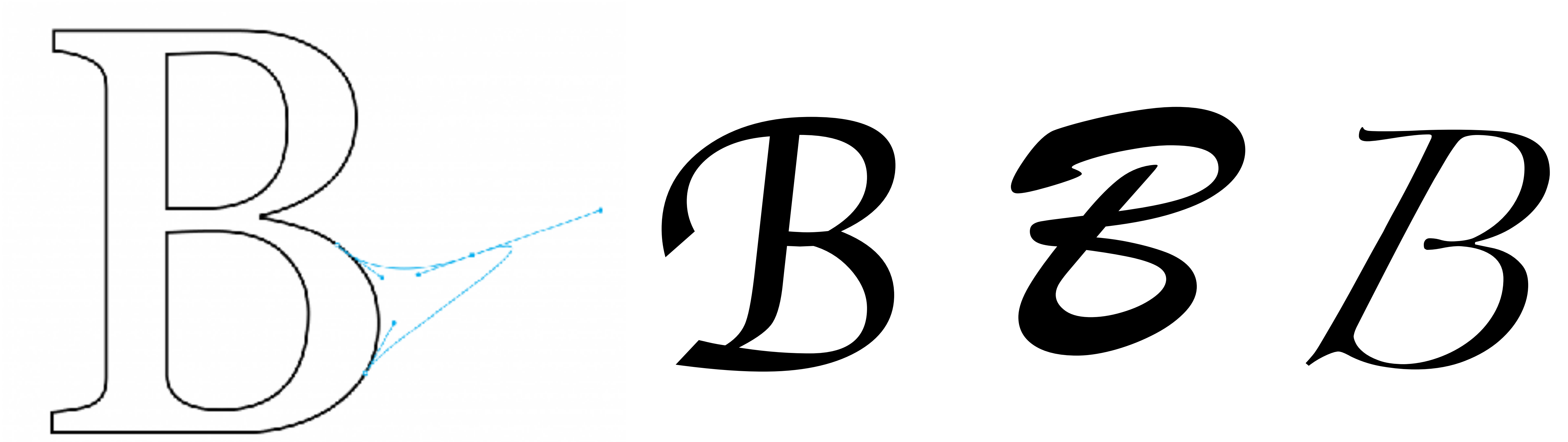


http://www.alatown.com/spline-history-architecture/

- Modificando i punti di controllo è possibile ottenere nuove forme e animarle

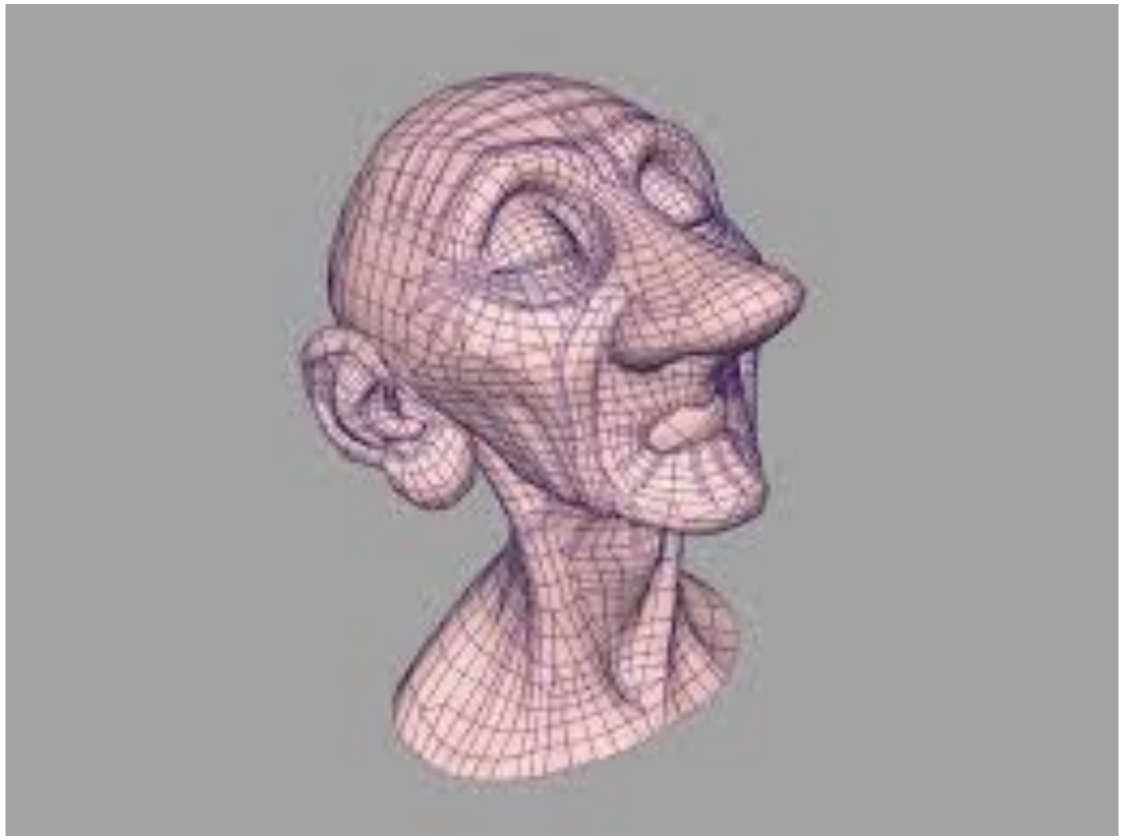
http://tutorialfield.blogspot.it/2011/06/blender-25-cycles-grass.html

- Modificando i punti di controllo è possibile ottenere nuove forme e animarle



http://www.alatown.com/spline-history-architecture/

Geri's Game (Pixar, 1997)



DeRose, Kass, Truong: Subdivision Surface in character Animation: Pixar Animation Studios, Proceedings of SIGGRAPH 1998

http://graphics.pixar.com/library/Geri/

Idea…

$$R(t) = \sum_{i=0,\ldots,n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} P_i$$

al variare del parametro *t* tra 0 ed 1, è una media pesata dei “punti di controllo” P_i rispetto ai **polinomi di Bernstein**

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Teorema di approssimazione di Weierstrass (1885)

Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua ed $\varepsilon > 0$, allora esiste un polinomio P tale che

$$|f(t) - P(t)| < \varepsilon \qquad \text{per ogni } t \in [a, b]$$

- Dimostrazione costruttiva di Bernstein nel 1912 (*t* tra 0 ed 1)

$$P(t) = \sum_{i=0,\dots,n} f\left(\frac{i}{n}\right) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

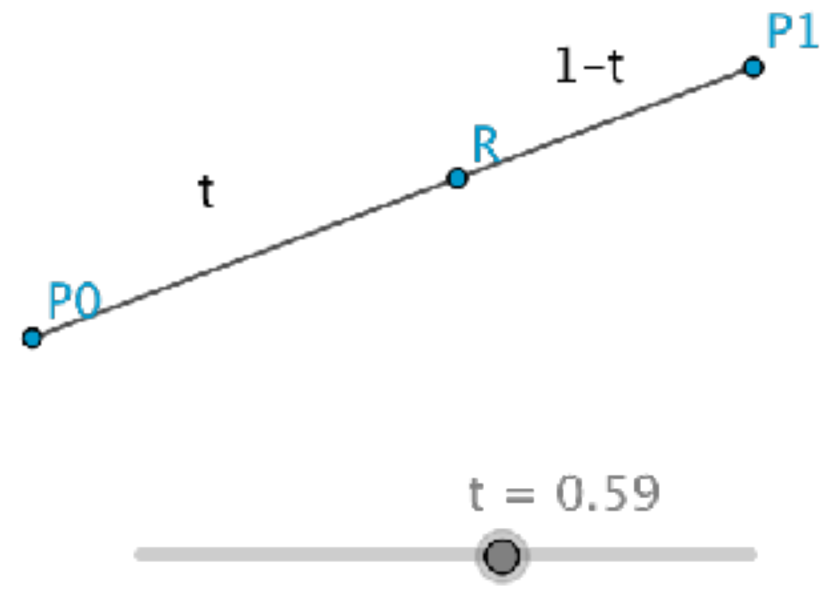
- (Ricorsività) $\qquad B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$

- Interpolazione agli estremi

n=1 (2 punti di controllo, grado 1)

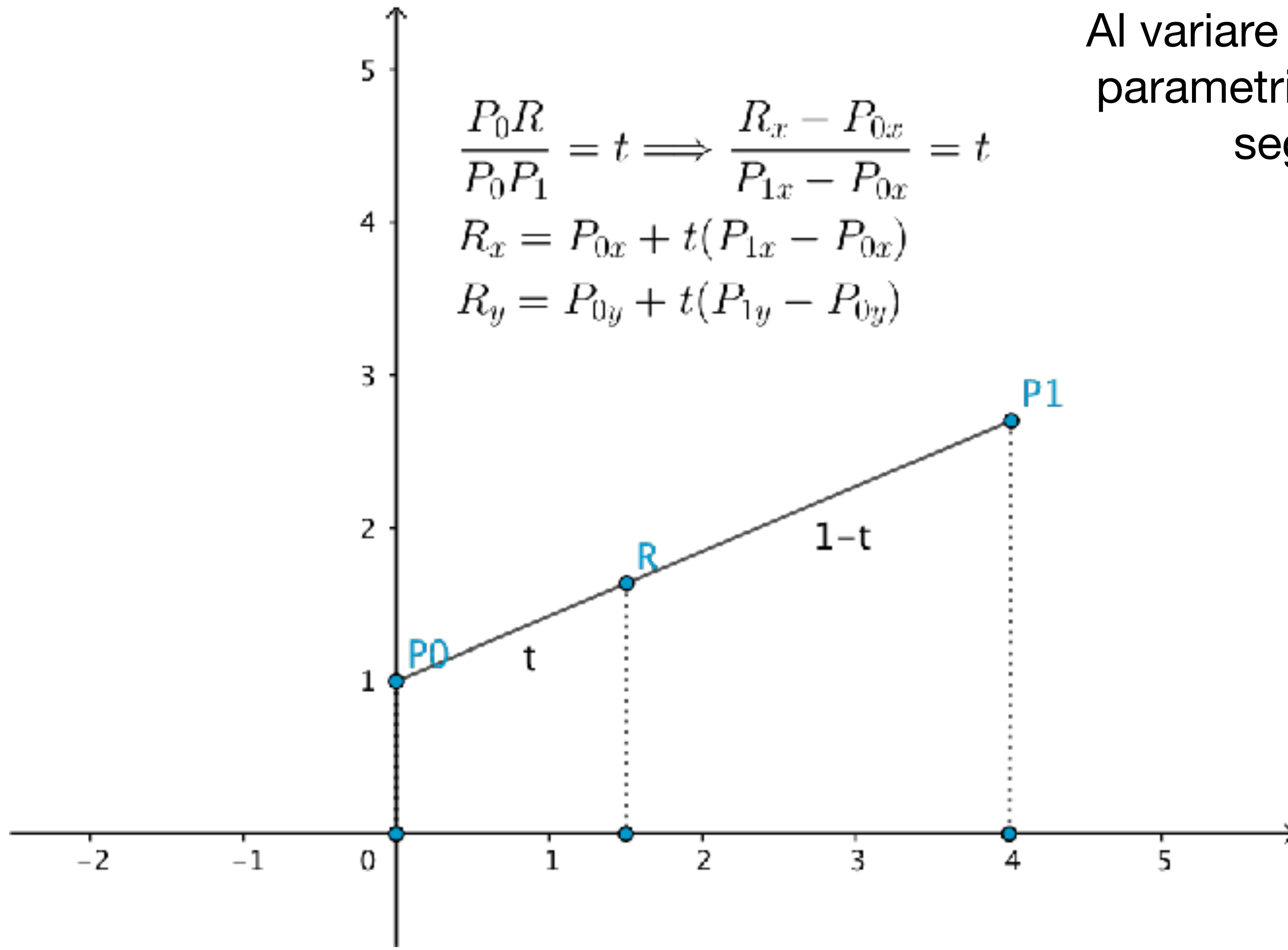
$$R(t) = \sum_{i=0,1} \binom{1}{i} t^i (1-t)^{1-i} P_i = \binom{1}{0}(1-t)P_0 + \binom{1}{1} t P_1$$

$$= (1-t)P_0 + tP_1 = P_0 + t(P_1 - P_0)$$



n=1 (2 punti di controllo, grado 1)

$$R(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = P_0 + t(P_1 - P_0)$$

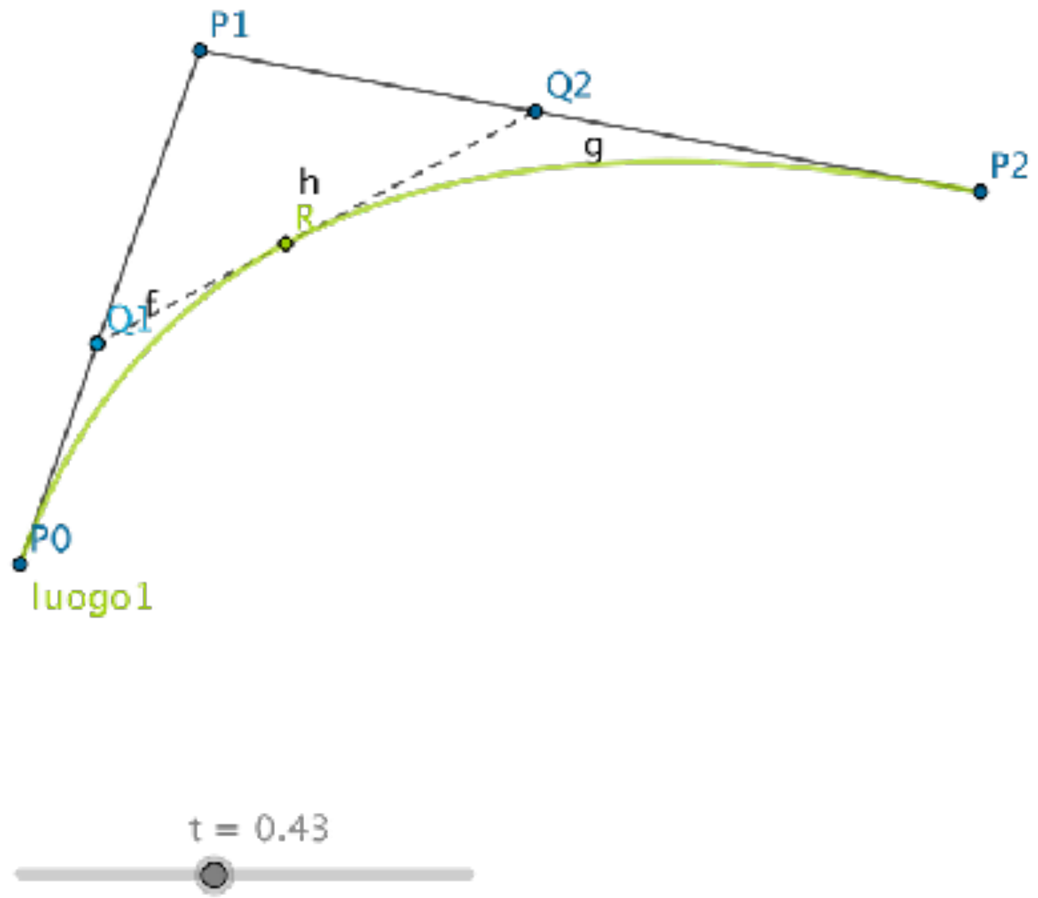


Al variare di *t*, la formula parametrizza i punti sul segmento P_0P_1

n=2 (3 punti di controllo, grado 2)

$$R(t) = \sum_{i=0,1,2} \binom{2}{i} t^i (1-t)^{2-i} P_i = \binom{2}{0}(1-t)^2 P_0 + \binom{2}{1} t(1-t) P_1 + \binom{2}{2} t^2 P_2$$

$$= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

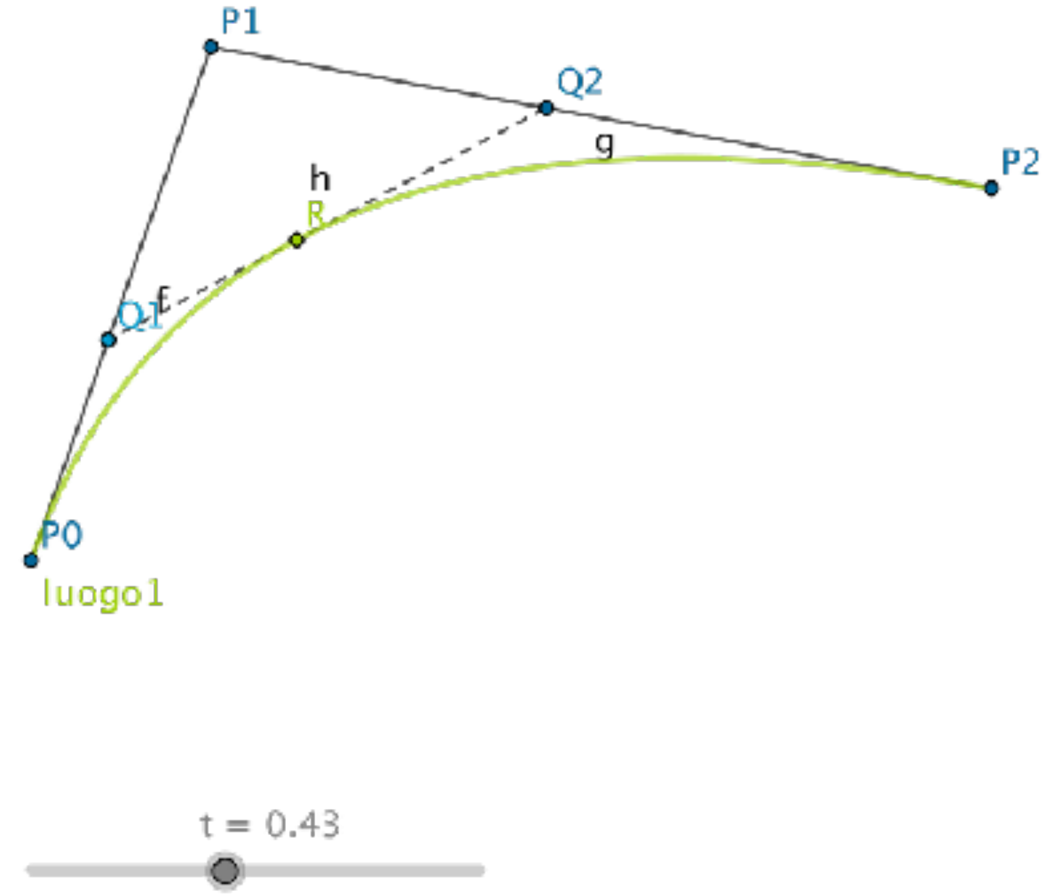


n=2 (3 punti di controllo, grado 2): costruzione con algoritmo di de Casteljau

$$R(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$Q_1 = P_0 + t(P_1 - P_0) \qquad\qquad Q_2 = P_1 + t(P_2 - P_1)$$

$$\begin{aligned} R(t) &= Q_1 + t(Q_2 - Q_1) \\ &= P_0 + t(P_1 - P_0) + t(P_1 + t(P_2 - P_1) - (P_0 + t(P_1 - P_0))) \\ &= P_0(1 - 2t + t^2) + P_1(2t - 2t^2) + P_2 t^2 \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \end{aligned}$$



Algoritmo di de Casteljau

Partiamo da *n* punti

$$P_0, P_1, \ldots, P_n$$

Al passo 0 abbiamo gli *n* punti

$$P_j^0 = P_j \text{ per } j = 0, \ldots, n$$

Al passo *k* abbiamo gli *n*-*k* punti

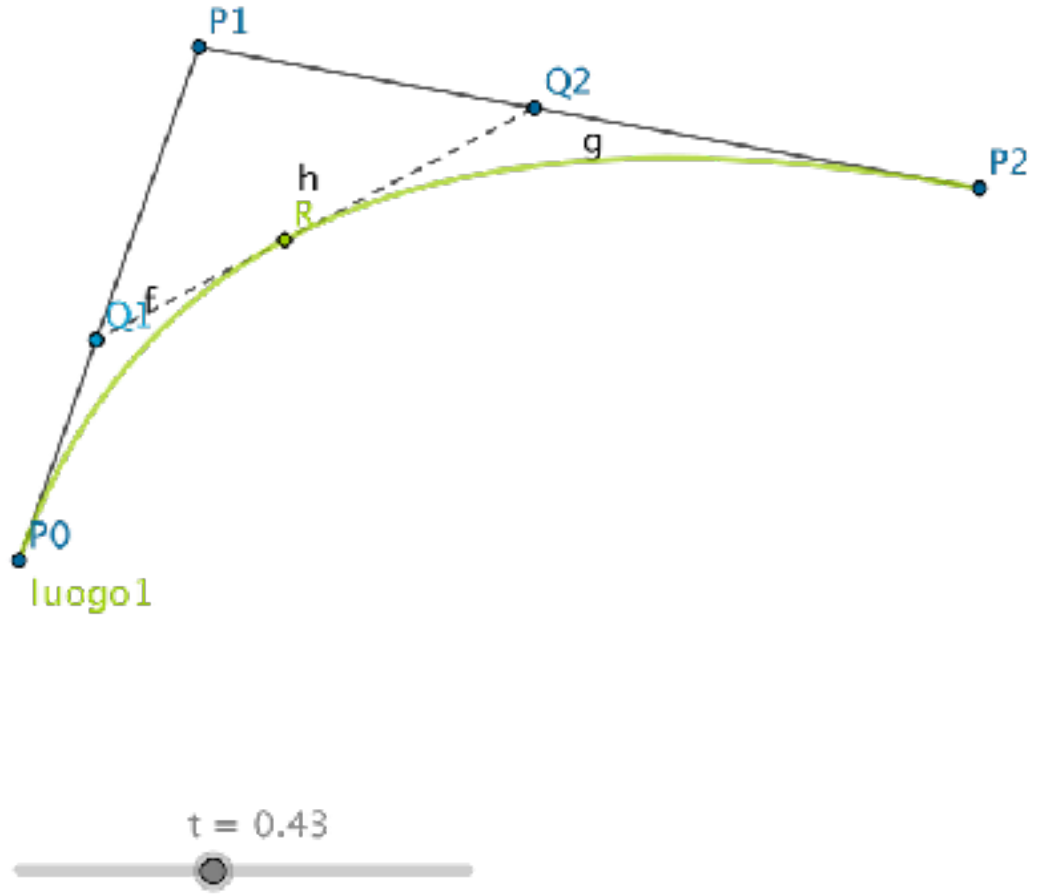
$$P_j^k = P_j^{k-1} + t(P_{j+1}^{k-1} - P_j^{k-1}) \quad \text{per } j = 0, \ldots, n-k$$

n=2 (3 punti di controllo, grado 2): costruzione con algoritmo di de Casteljau

$$R(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$Q_1 = P_0 + t(P_1 - P_0) \qquad\qquad Q_2 = P_1 + t(P_2 - P_1)$$

$$\begin{aligned} R(t) &= Q_1 + t(Q_2 - Q_1) \\ &= P_0 + t(P_1 - P_0) + t(P_1 + t(P_2 - P_1) - (P_0 + t(P_1 - P_0))) \\ &= P_0(1 - 2t + t^2) + P_1(2t - 2t^2) + P_2 t^2 \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \end{aligned}$$



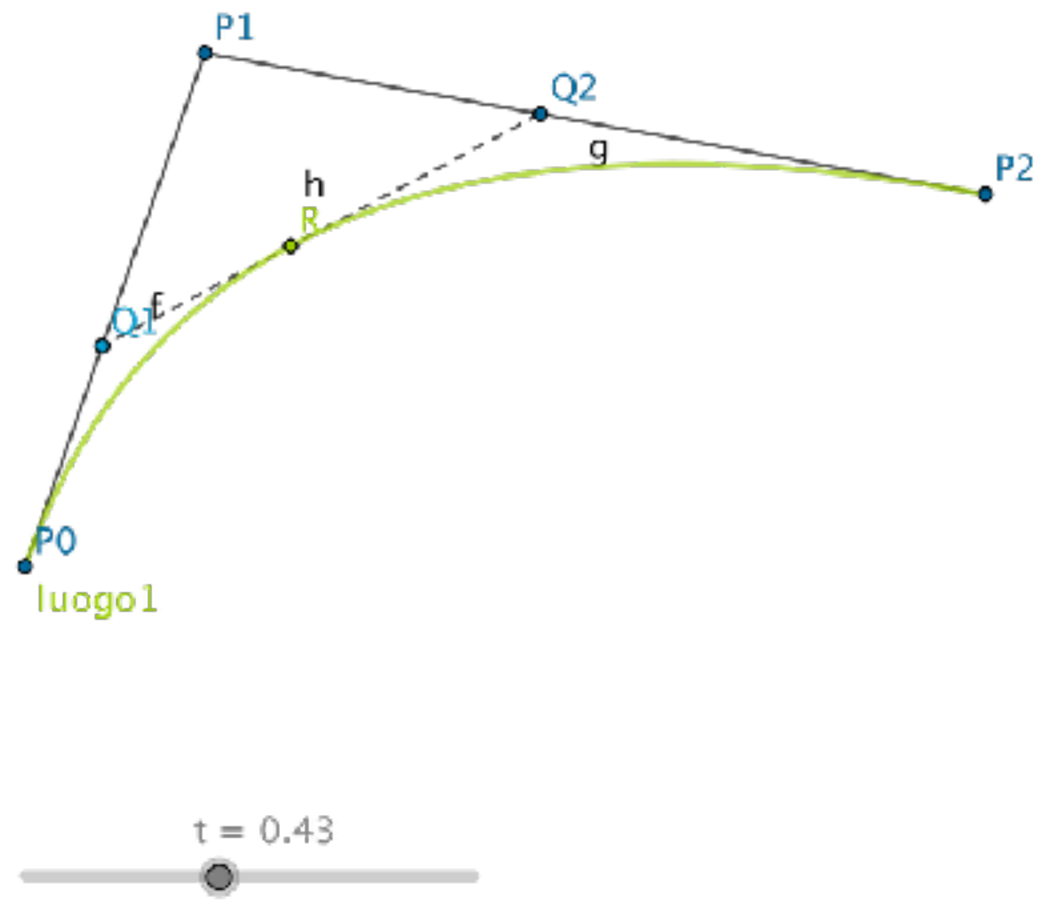
n=2 (3 punti di controllo, grado 2): costruzione con algoritmo di de Casteljau

$$R(t) = (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2$$

$$Q_1 = P_0 + t(P_1 - P_0) \qquad\qquad Q_2 = P_1 + t(P_2 - P_1)$$

$$\begin{aligned} R(t) &= Q_1 + t(Q_2 - Q_1) \\ &= P_0 + t(P_1 - P_0) + t(P_1 + t(P_2 - P_1) - (P_0 + t(P_1 - P_0))) \\ &= P_0(1 - 2t + t^2) + P_1(2t - 2t^2) + P_2 t^2 \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2t(1-t)P_1 + t^2 P_2 \end{aligned}$$

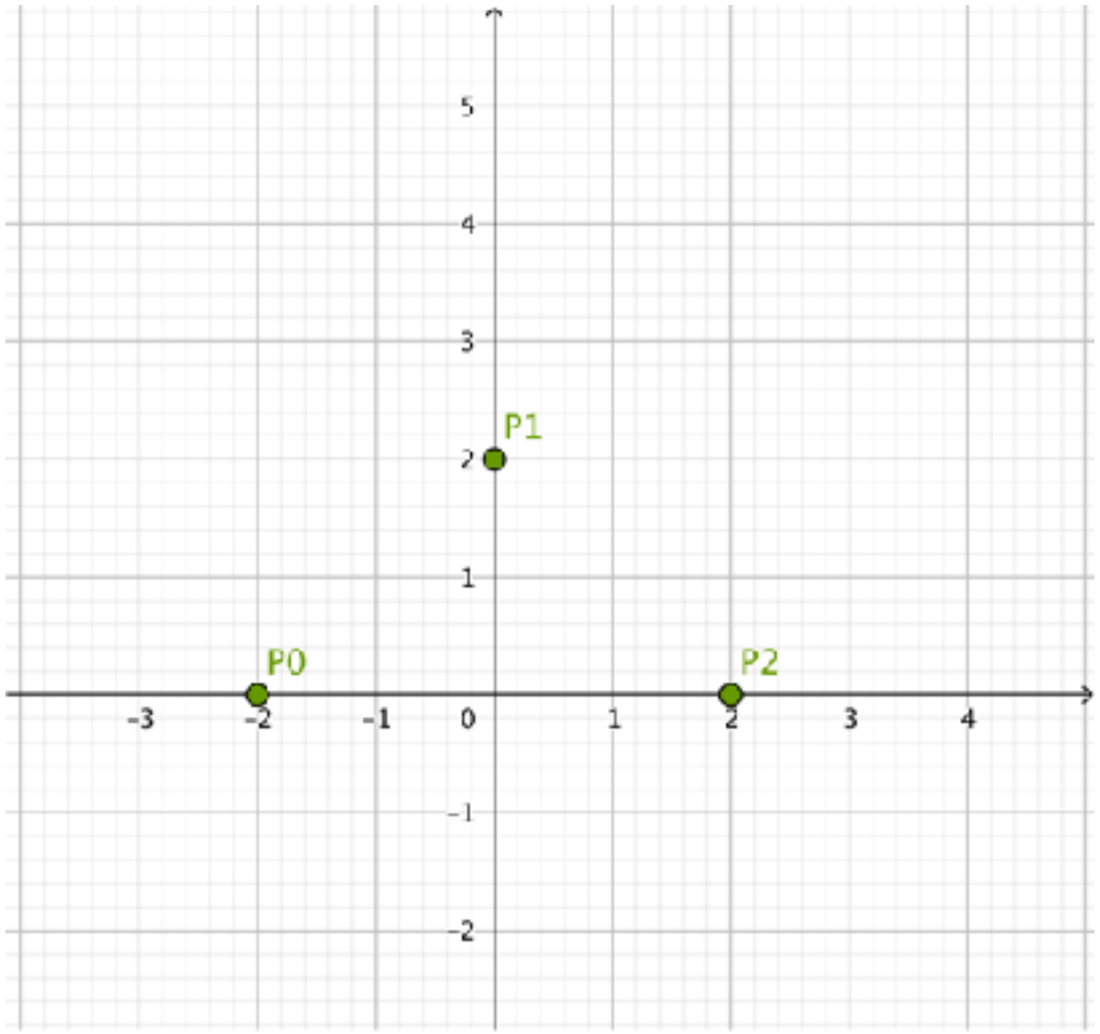
In questo caso i punti *R(t)* descrivono un arco di parabola!



Esercizio:

Verificare che si ottiene un arco di parabola scegliendo i punti:

$$P_0 = (-2, 0) \qquad P_1 = (0, 2) \qquad P_2 = (2, 0)$$

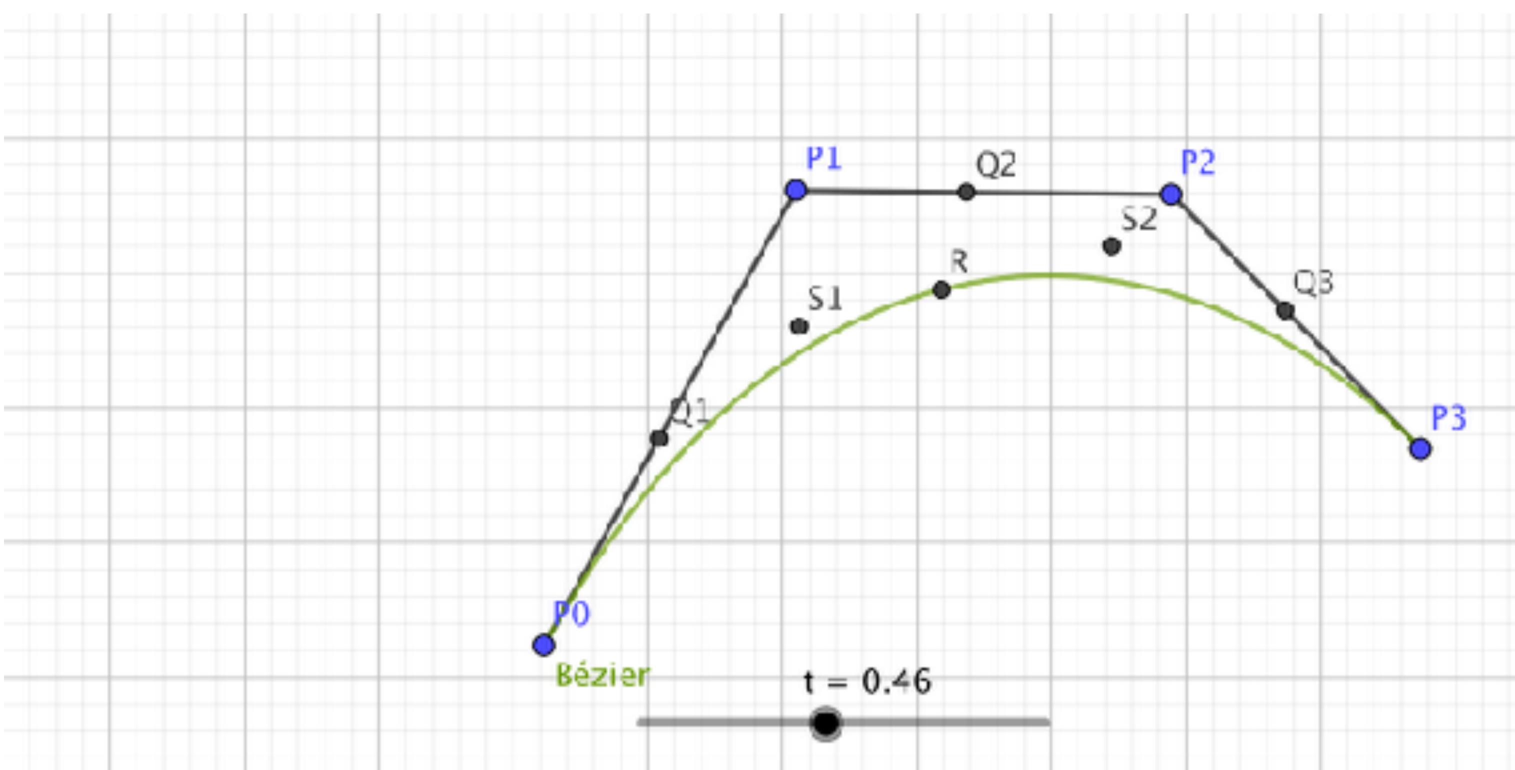


n=3 (4 punti di controllo, grado 3)

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{i=0}^{3} P_i \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} \\
&= P_0 \binom{3}{0} (1-t)^3 + P_1 \binom{3}{1} t(1-t)^2 + P_2 \binom{3}{2} t^2(1-t) + P_3 \binom{3}{3} t^3 \\
&= t^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3
\end{aligned}
$$

n=3 (4 punti di controllo, grado 3)

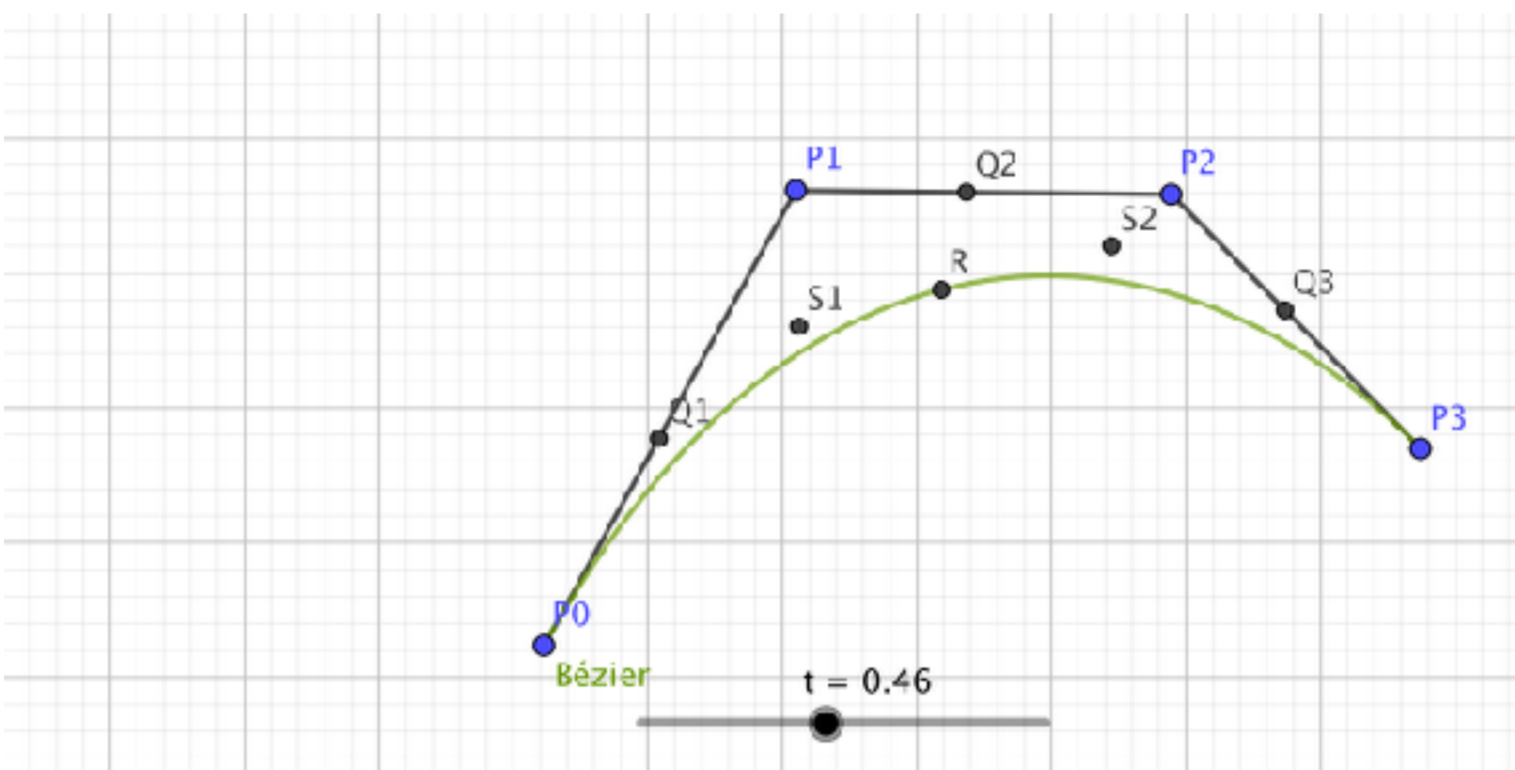
$$
\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{i=0}^{3} P_i \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} \\
&= P_0 \binom{3}{0} (1-t)^3 + P_1 \binom{3}{1} t(1-t)^2 + P_2 \binom{3}{2} t^2(1-t) + P_3 \binom{3}{3} t^3 \\
&= t^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3
\end{aligned}
$$



CURVE DI BÉZIER

n=3 (4 punti di controllo, grado 3)

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{i=0}^{3} P_i \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} \\
&= P_0 \binom{3}{0} (1-t)^3 + P_1 \binom{3}{1} t(1-t)^2 + P_2 \binom{3}{2} t^2(1-t) + P_3 \binom{3}{3} t^3 \\
&= t^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3
\end{aligned}
$$

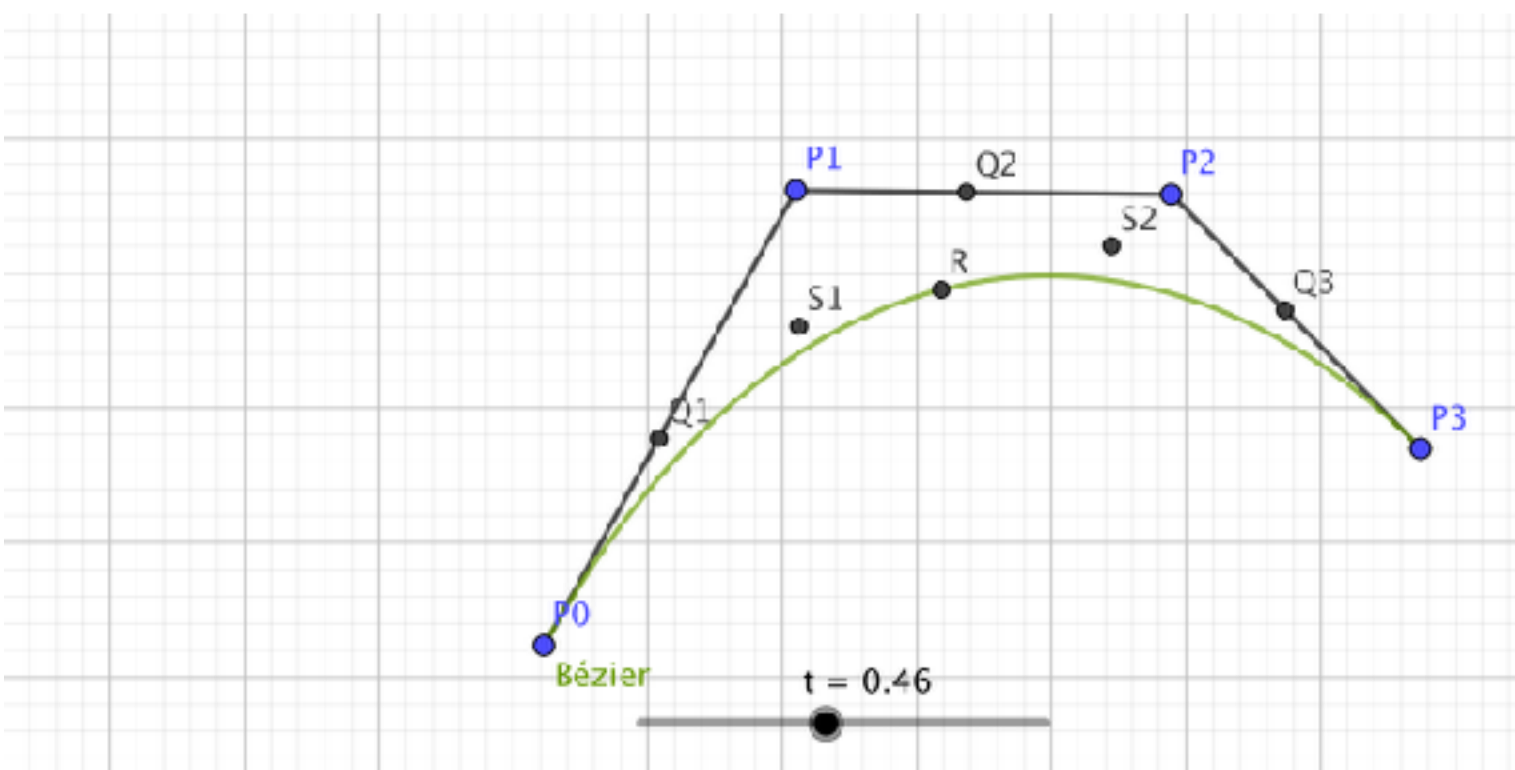


Esercizio!

CURVE DI BÉZIER

n=3 (4 punti di controllo, grado 3)

$$
\begin{aligned}
R(t) &= \sum_{i=0}^{3} P_i \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i} \\
&= P_0 \binom{3}{0} (1-t)^3 + P_1 \binom{3}{1} t(1-t)^2 + P_2 \binom{3}{2} t^2(1-t) + P_3 \binom{3}{3} t^3 \\
&= t^3 P_0 + 3t(1-t)^2 P_1 + 3t^2(1-t) P_2 + t^3 P_3
\end{aligned}
$$



Esercizio!

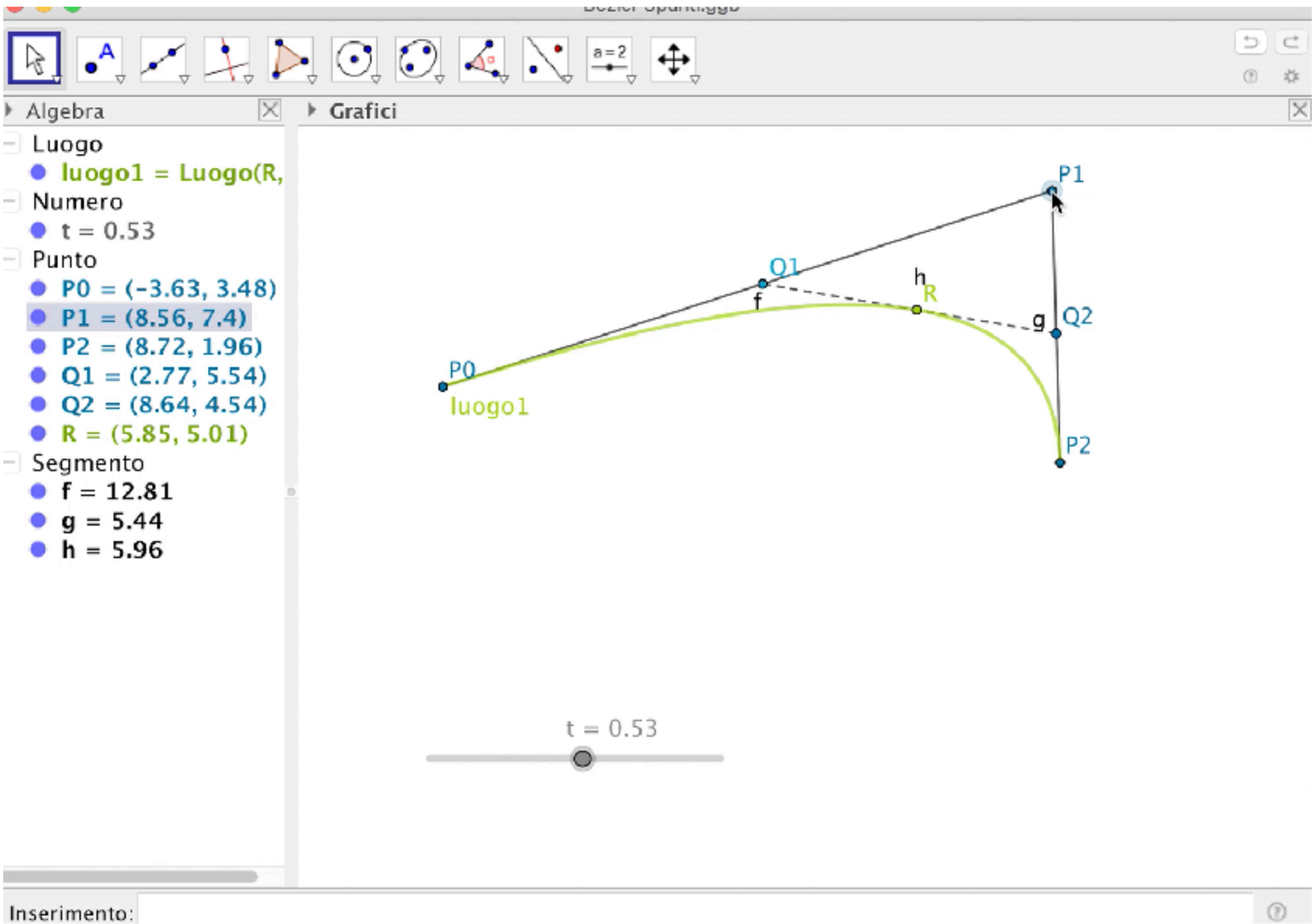
A partire da P_0, P_1, P_2, P_3

costruiamo Q_1, Q_2, Q_3

e con questi costruiamo

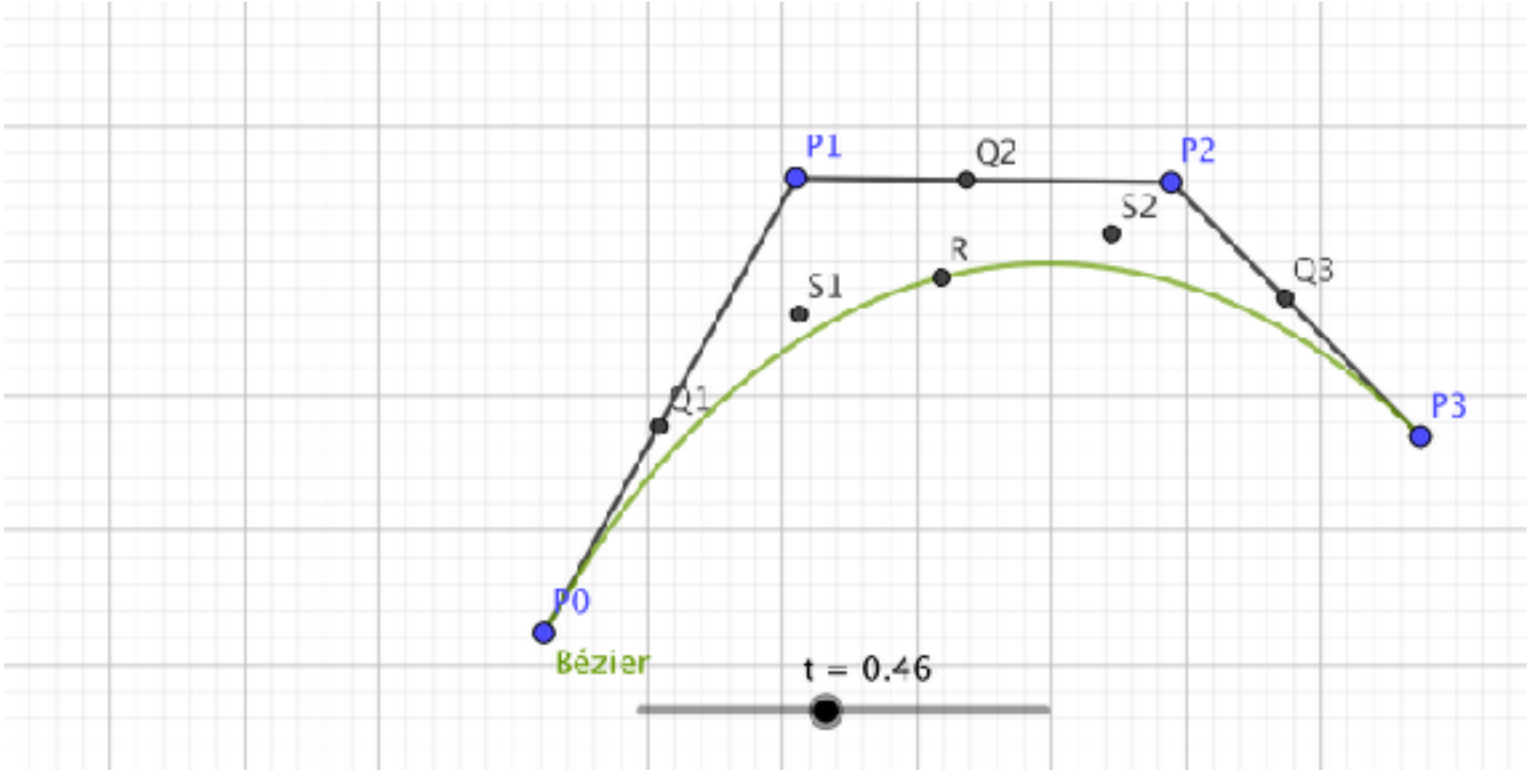
S_1, S_2 ed infine R

CURVE DI BÉZIER



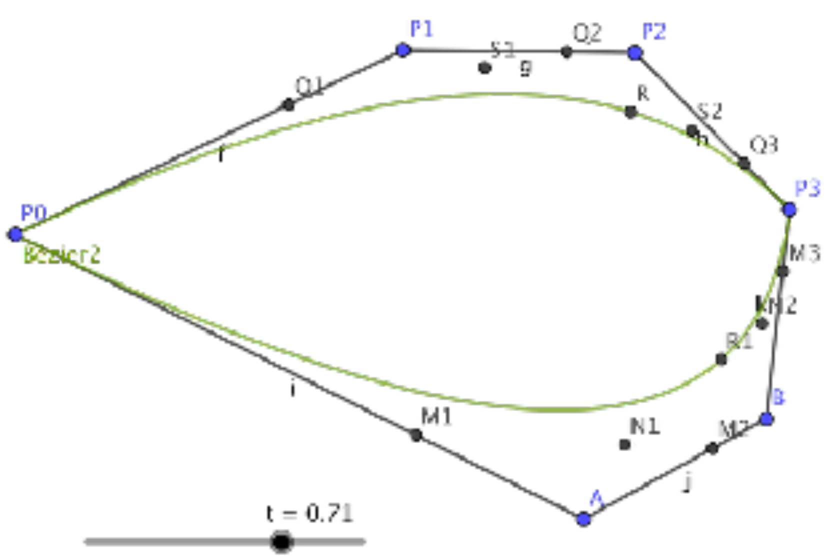
Alcune proprietà

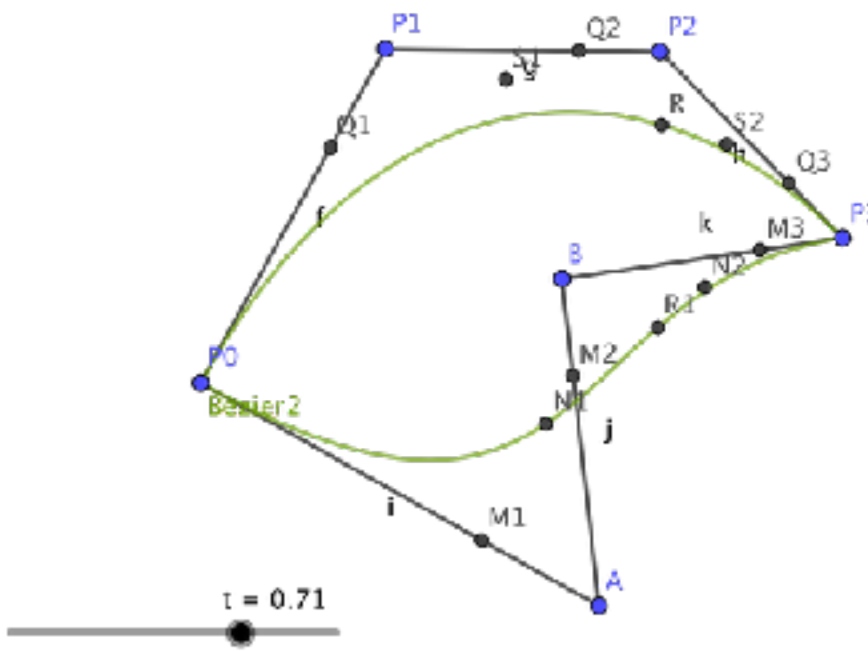
- contenute nel poligono di controllo
- non passano per i punti di controllo intermedi
- passano per il primo e per l'ultimo punto di controllo….tangenza
- modifiche dei punti di controllo ⟶ deformazione **globale** della curva
- non si possono disegnare circonferenze o archi di circonferenza



Alcune proprietà

- Si possono anche ottenere curve chiuse





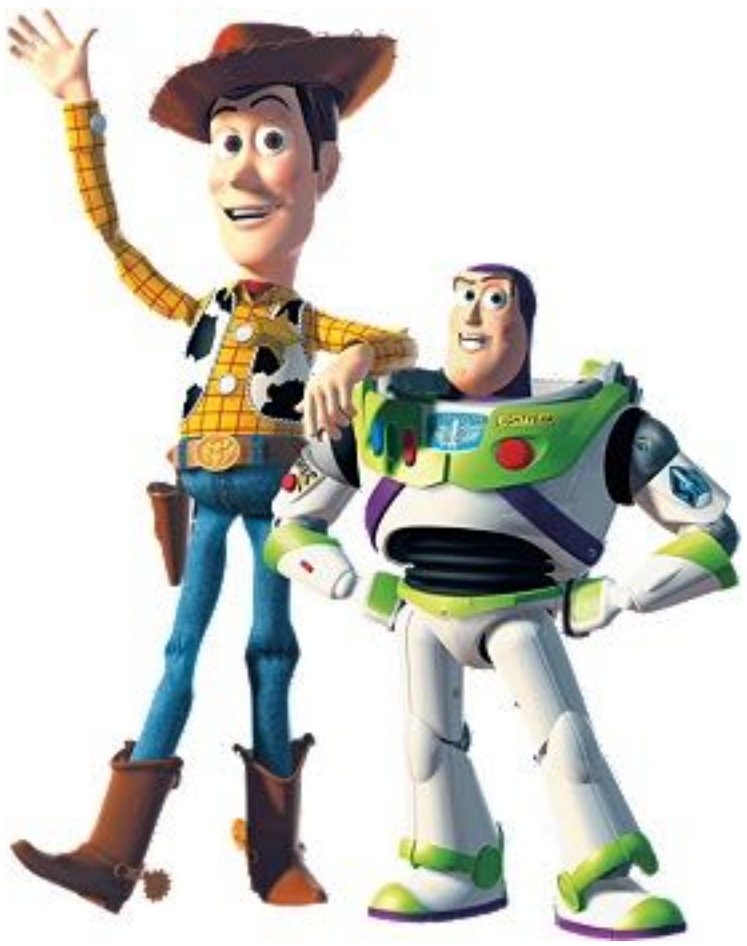
Costruiamo le curve di Bézier con Geogebra:

- Geogebra è tra i programmi installati (Istruzione)
- Costruire una curva di Bèzier di grado 2:
  - 3 punti e i segmenti,
  - slides
  - 2 punti parametrizzati, $R(t) = (1-t)P_0 + tP_1 = P_0 + t(P_1 - P_0)$
  - Punto che descrive Bezier
  - Mostra luogo

- Provare a muovere la curva

- Costruire una curva di Bèzier di grado 3

- Costruire una curva di Bèzier chiusa



http://pixar.wikia.com/wiki/Woody

Grazie per l'attenzione:

verso l'infinito e oltre….

Guardare al passato per le sfide del presente e del futuro