

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z
Bari, 22 Febbraio 2023
Traccia: F

- Esercizio 1.** (1) Stabilire se esiste un grafo con 18 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 1 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
- (2) Stabilire se esiste un albero con 18 vertici, dei quali: 4 di grado 4, 1 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

Esercizio 2. Stabilire se la seguente successione definita per ricorrenza

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \begin{cases} a_0 = & 1 \\ a_n = & a_{n-1} + 6n + 3 \quad n \geq 1. \end{cases}$$

ammette come formula chiusa la successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $b_n = 3n(n+2) + 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 3. Consideriamo 7 Portoghesi, 9 Finlandesi e 7 Lussemburghesi. I Lussemburghesi sono tutte Donne, tra i Portoghesi ci sono 4 Donne e tra i Finlandesi ci sono 6 Uomini.

- In quanti modi diversi si può formare un comitato di 13 persone?
- In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
- In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
- In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 4. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{21}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 5. Date tre proposizioni S , R e P , scrivere la tabella di verità di $(R \vee P) \rightarrow (\bar{S} \rightarrow R)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall d \in \mathbb{Z} \quad \exists w \in \mathbb{Q} \quad \text{ed} \quad \exists z \in \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad 3d + 6w - z^4 = 0$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 6. Dimostrare il seguente teorema: dati $a, b, c \in \mathbb{Z}$, l'equazione diofantea

$$ax + by = c$$

ammette soluzioni (numeri interi) se e soltanto se $MCD(a, b) \mid c$.