PROVA SCRITTA DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z
Bari, 21 Gennaio 2022
Traccia: B

Esercizio 1. Stabilire, usando il principio di induzione, se è vero che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha
$$5\sum_{i=-1}^{n} 6^i = 6^{n+1} - \frac{1}{6}.$$

Esercizio 2. Sia assegnata su $\mathbb{Z}$ la relazione
$$\mathscr{R} = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;\mid\; 12 \mid 11b + a\},$$
(ovvero $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a\,\mathscr{R}\,b \Longleftrightarrow 12 \mid 11b + a$). Stabilire se $\mathscr{R}$ definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su $\mathbb{Z}$. Se è di equivalenza, scrivere la classe di equivalenza di 0.

Esercizio 3. Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni
$$108x + 148y = 8$$

Esercizio 4. Siano $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Determinare, se possibile, BA e AB.
(2) Determinare, se possibile, il determinante di B e di A.
(3) Determinare, se possibile, le matrici inverse di B e di A.

Esercizio 5. Dare la definizione di elemento invertibile nell'anello commutativo unitario $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$. Inoltre, dimostrare che l'elemento $[a]_n$ in $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ ammette inverso se e solo se $MCD(a,n) = 1$.

Esercizio 6.
(1) Stabilire se esiste un grafo con 17 vertici, dei quali: 2 di grado 5, 2 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 17 vertici, dei quali: 2 di grado 5, 2 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.