

# PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z  
Bari, 20 Gennaio 2023  
Traccia: 1

**Esercizio 1.** Stabilire se le seguenti funzioni

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad h(a) = \frac{1}{3} - 2a^5$$

e

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad f(s) = \frac{5}{4}s + \frac{1}{3}$$

sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre determinare, ove possibile, le composizioni  $f \circ h$  e  $h \circ f$  e le funzioni inverse  $h^{-1}$  e  $f^{-1}$ .

**Esercizio 2.** Stabilire con il principio di induzione se è vero che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\frac{1}{8} \sum_{i=0}^{n+1} \left(\frac{8}{9}\right)^i = \frac{9}{8} - \left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}.$$

**Esercizio 3.** Dare la definizione di numero primo. Inoltre, stabilire se la cardinalità dell'insieme dei numeri primi è finita o infinita e fornire una dimostrazione dettagliata.

**Esercizio 4.** Determinare l'ordine del gruppo  $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$ . Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi e stabilire quali sono generatori.

**Esercizio 5.** Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 4x \equiv 12 \pmod{44} \\ 61x \equiv 6 \pmod{5} \\ 41x \equiv 86 \pmod{4}. \end{cases}$$

**Esercizio 6.** Siano  $A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  e  $B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  le seguenti matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare, se possibile,  $BA$  e  $AB$ .
- (2) Determinare, se possibile, il determinante di  $B$  e di  $A$ .
- (3) Determinare, se possibile, le matrici inverse di  $B$  e di  $A$ .