

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z
Bari, 4 Febbraio 2022
Traccia: 1

Esercizio 1. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{22}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 2. Determinare se le seguenti funzioni

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad g(c) = \frac{2}{5} - \frac{3}{7}c^5$$

e

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{1}{4}t - 4$$

sono iniettive, suriettive o biettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ f$ e $f \circ g$ e le funzioni inverse g^{-1} e f^{-1} .

Esercizio 3. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la seguente operazione $*$: $A \times A \rightarrow A$, tale che

$$\forall (x, a), (y, b) \in A \quad (x, a) * (y, b) = (7xy, b + a + 2).$$

- (1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
- (2) Stabilire se l'operazione è associativa.
- (3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
- (4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(2, 2)$ in $(A, *)$.

Esercizio 4. Consideriamo 6 Svizzeri, 10 Croati e 7 Greci. Gli Svizzeri sono tutte Donne, tra i Croati ci sono 6 Donne e tra i Greci ci sono 5 Uomini.

- a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 10 persone?
- b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
- c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
- d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 5. Siano $C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare, se possibile, DC e CD .
- (2) Determinare, se possibile, il determinante di C e di D .
- (3) Determinare, se possibile, le matrici inverse di D e di C .

Esercizio 6. Dare la definizione di numero primo. Inoltre, stabilire se la cardinalità dell'insieme dei numeri primi è finita o infinita e fornire una dimostrazione dettagliata.