

# PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z  
Bari, 3 Febbraio 2023  
Traccia: V

**Esercizio 1.** Sia  $h : A \rightarrow B$  una funzione, e siano  $X, X' \subseteq B$ . Dare la definizione di immagine inversa di un sottoinsieme di  $B$ . Inoltre, dimostrare se è vero che

$$h^{-1}(X \cap X') = h^{-1}(X) \cap h^{-1}(X').$$

**Esercizio 2.** (1) Stabilire se esiste un grafo con 17 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 3 di grado 4, 4 di grado 3, 4 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

(2) Stabilire se esiste un albero con 17 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 3 di grado 4, 4 di grado 3, 4 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

**Esercizio 3.** Sia assegnata su  $\mathbb{Z}$  la relazione

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 14 \mid 13y + x\},$$

(ovvero  $\forall x, y \in \mathbb{Z} \quad x \mathcal{R} y \iff 14 \mid 13y + x$ ). Stabilire se  $\mathcal{R}$  definisce una relazione d'ordine o di equivalenza su  $\mathbb{Z}$ . Se è di equivalenza, scrivere la classe di equivalenza di 1.

**Esercizio 4.** Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$80x + 114y = 6.$$

**Esercizio 5.** In  $S_9$ , sia assegnata la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 8 & 5 & 4 & 7 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

- (1) Descrivere l'elemento  $h$  come prodotto di cicli disgiunti.
- (2) Stabilire se l'elemento  $h$  è pari o dispari.
- (3) Descrivere esplicitamente l'inverso di  $h$ .
- (4) Stabilire l'ordine di  $h$  nel gruppo  $S_9$ .
- (5) Descrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da  $h$ .

**Esercizio 6.** Si consideri sull'insieme  $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  la seguente operazione  $*$  :  $A \times A \rightarrow A$ , tale che

$$\forall (a, w), (b, z) \in A \quad (a, w) * (b, z) = (b + a + 3, \frac{1}{2}wz).$$

- (1) Determinare se l'operazione è associativa.
- (2) Determinare se l'operazione è commutativa.
- (3) Se esiste, determinare l'elemento neutro della struttura algebrica  $(A, *)$ .
- (4) Se esiste, descrivere in modo esplicito l'inverso di  $(2, 0)$  in  $(A, *)$ .