

# PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z  
Bari, 9 Aprile 2024  
Traccia: X

**Esercizio 1.** Stabilire con una dimostrazione se le seguenti congruenze sono vere o false:

$$25^{17} \equiv 25 \pmod{48} \qquad 12^{22} \equiv 2 \pmod{23}.$$

**Esercizio 2.** Se possibile, risolvere la seguente equazione diofantea indicandone tutte le soluzioni

$$70x + 165y = 15.$$

**Esercizio 3.** Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello  $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$ . Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

**Esercizio 4.** Determinare l'ordine del gruppo  $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$ . Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi e stabilire quali sono generatori.

**Esercizio 5.** In  $S_9$ , sia assegnata la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 1 & 7 & 4 & 2 & 8 & 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (1) Descrivere l'elemento  $h$  come prodotto di cicli disgiunti.
- (2) Stabilire se l'elemento  $h$  è pari o dispari.
- (3) Descrivere esplicitamente l'inverso di  $h$ .
- (4) Stabilire l'ordine di  $h$  nel gruppo  $S_9$ .
- (5) Descrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da  $h$ .

**Esercizio 6.** Sia  $h : A \rightarrow B$  una funzione, e siano  $X, X' \subseteq B$ . Dare la definizione di immagine inversa di un sottoinsieme di  $B$ . Inoltre, dimostrare se è vero che

$$h^{-1}(X \cap X') = h^{-1}(X) \cap h^{-1}(X').$$