

PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z
Bari, 23 Febbraio 2024
Traccia: X

Esercizio 1. Siano $C \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ e $D \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare, se possibile, DC e CD .
- (2) Determinare, se possibile, il determinante di C e di D .
- (3) Determinare, se possibile, le matrici inverse di D e di C .

Esercizio 2. Considerate tre proposizioni P , S e Q , scrivere la tabella di verità di $(\overline{P} \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow S)$. Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\exists x \in \mathbb{Z} \quad \text{tale che} \quad \forall a \in \mathbb{Q} \text{ e } \forall w \in \mathbb{R} \quad \text{si ha} \quad 2x - 3a + w^2 = 0.$$

è vera o falsa, motivandone la risposta, e scriverne la sua negazione.

Esercizio 3. Si consideri su \mathbb{Z} la seguente relazione

$$\mathcal{R} = \{(u, v) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \mid v - u\},$$

(ovvero $\forall u, v \in \mathbb{Z} \quad u \mathcal{R} v \iff 4 \mid v - u$, ovvero esiste $k \in \mathbb{Z}$, tale che $v - u = 4k$). Determinare se \mathcal{R} è una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, d'ordine, d'equivalenza.

Esercizio 4. Consideriamo 7 Canadesi, 8 Americani e 8 Messicani. I Canadesi sono tutte Donne, tra gli Americani ci sono 5 Donne e tra i Messicani ci sono 6 Uomini.

- a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 5 persone?
- b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
- c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
- d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 5. Determinare se le seguenti funzioni

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad f(s) = 2 - 3s^3$$

e

$$g : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall y \in \mathbb{Q} \quad g(y) = \frac{1}{2} + 2y$$

sono iniettive, suriettive o biiettive. Inoltre calcolare, ove possibile, le composizioni $g \circ f$ e $f \circ g$ e le funzioni inverse g^{-1} e f^{-1} .

Esercizio 6. Siano $a, b, c, \in \mathbb{Z}$. Dimostrare che se $c \mid a$ e $c \mid b$ allora per ogni $x, y, \in \mathbb{Z}$ si ha che $c \mid xa + yb$.