

# PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z  
Bari, 11 Novembre 2024  
Traccia: 3

**Esercizio 1.** In  $S_8$ , sia assegnata la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (1) Descrivere l'elemento  $h$  come prodotto di cicli disgiunti.
- (2) Stabilire se l'elemento  $h$  è pari o dispari.
- (3) Descrivere esplicitamente l'inverso di  $h$ .
- (4) Stabilire l'ordine di  $h$  nel gruppo  $S_8$ .
- (5) Descrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da  $h$ .

**Esercizio 2.** Siano  $B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$  e  $D \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  le seguenti matrici

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Determinare, se possibile,  $DB$  e  $BD$ .
- (2) Determinare, se possibile, il determinante di  $B$  e di  $D$ .
- (3) Determinare, se possibile, le matrici inverse di  $D$  e di  $B$ .

**Esercizio 3.** Stabilire con il principio di induzione se è vero che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha

$$\sum_{i=-1}^n \frac{6}{5}i = \frac{3(n(n+1) - 2)}{5}.$$

**Esercizio 4.** Consideriamo 9 Cileni, 8 Brasiliani e 6 Peruviani. I Peruviani sono tutte Donne, tra i Cileni ci sono 5 Donne e tra i Brasiliani ci sono 5 Uomini.

- a) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 7 persone?
- b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
- c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
- d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

**Esercizio 5.** Si consideri su  $\mathbb{Z}$  la seguente relazione

$$\mathcal{R} = \{(a, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 7 \mid d - a\},$$

(ovvero  $\forall a, d \in \mathbb{Z} \quad a \mathcal{R} d \iff 7 \mid d - a \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \text{ tale che } d - a = 7k$ ).  
Determinare se  $\mathcal{R}$  è una relazione riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica, d'ordine, d'equivalenza.

**Esercizio 6.** Sia  $A$  un insieme finito di cardinalità  $n$ . Dare la definizione di insieme  $\mathcal{P}(A)$  della parti di  $A$ . Inoltre stabilire la cardinalità di  $\mathcal{P}(A)$  e dare una dimostrazione dettagliata della risposta.