ESERCIZIO SUL TEOREMA DI GRAM-SCHMIDT

C.L.Matematica
Marzo 2020

Teorema 1. *Siano* (V, g) *uno spazio vettoriale euclideo e* $v_1, v_2, v_3, \dots$ *una successione di vettori in* V *(finita o infinita). Allora esiste una successione di vettori* $w_1, w_2, w_3, \dots$ *di vettori di* V *(finita dello stesso numero o infinita) tale che* $\forall k \geq 1$*:*

(1) $< v_1, v_2, \dots, v_k >=< w_1, w_2, \dots, w_k >$*;*

(2) *i vettori* $w_1, w_2, \dots, w_k$ *sono a due a due ortogonali, ovvero* $g(w_i, w_j) = 0$ *per ogni* $i \neq j$*.*

(*) Inoltre, se $u_1, u_2, u_3, \dots$ *è un altra successione che soddisfa le stesse condizioni, allora per ogni* $j \geq 1$ *esiste* $\lambda_j \in \mathbb{R}^*$ *tale che* $u_j = \lambda_j w_j$*.*

Esercizio 1. Dimostrare l'affermazione $(*)$ del precedente teorema.

Soluzione 1. *Linee guida per una possibile soluzione.* [1]

(1) Procedere per induzione sul numero di vettori.

(2) Caso $k = 1$, si ha $< u_1 >=< v_1 >=< w_1 >$, quindi? E se v_1 è il vettore nullo?

(3) Assumere vero il caso k: scriverlo esplicitamente.

(4) Dimostrarlo per $k + 1$, scrivere esplicitamente cosa si deve dimostrare.

(5) Considerare che fino a k l'enunciato è vero. Quindi?.... $u_j = \lambda_j w_j$ per ogni?

(6) È vero che $< u_1, u_2, \dots, u_{k+1} >=< w_1, w_2, \dots, w_{k+1} >$?

(7) Sfruttando che $< u_1, u_2, \dots, u_{k+1} >=< w_1, w_2, \dots, w_{k+1} >$, convincersi che $u_{k+1} = z + \lambda_{k+1} w_{k+1}$, con $z \in < w_1, w_2, \dots, w_k >$.

(8) Provare che u_{k+1} è ortogonale a tutti i $w_1, w_2, \dots, w_k$ e quindi a z.

(9) Provare che w_{k+1} è ortogonale a tutti i $w_1, w_2, \dots, w_k$ e quindi a z.

(10) Concludere che z è ortogonale a se stesso.

(11) Quindi $z = ..?$

(12) Allora $u_{k+1} = \lambda_{k+1} w_{k+1}$?

(13) λ_{k+1} è non nullo?

(14) Convincersi di aver concluso l'esercizio?

[1]Nonostante l'impegno, errori, sviste e imprecisioni sono sparsi ovunque, la loro segnalazione è molto apprezzata.