ESONERO DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. ITPS, M-Z
Bari, 21 Dicembre 2021
Traccia: B

Esercizio 1. (1) Stabilire se esiste un albero con 18 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 3 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 18 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 3 di grado 4, 5 di grado 3, 3 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 2. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 4 & 5 & 9 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare esplicitamente l'inverso di h.
(3) Individuare l'ordine di h nel gruppo S_9.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.
(5) Indicare se l'elemento h è pari o dispari.

Esercizio 3. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 24x \equiv 6 \pmod{21} \\ 21x \equiv 3 \pmod{18} \\ 22x \equiv 6 \pmod{5}. \end{cases}$$

Esercizio 4. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{18}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 5. Si consideri sull'insieme $\mathbb{R}$ la seguente operazione $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che

$$\forall\, a, z \in \mathbb{R} \qquad a * z = a + 3za + z.$$

(1) Determinare se l'operazione è commutativa.
(2) Determinare se l'operazione è associativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(\mathbb{R}, *)$.
(4) Descrivere, se esistono tutti gli elementi invertibili e il loro inverso.

Esercizio 6. Siano $E \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $F \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, EF e FE.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di E e di F.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di E e di F.

ESONERO DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 22 Dicembre 2020
Traccia: A

Esercizio 1. Siano $C \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $E \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, EC e CE.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di E e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di E e di C.

Esercizio 2. In S_8, sia assegnata la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare l'ordine di f nel gruppo S_8.
(3) Determinare se l'elemento f è pari o dispari.
(4) Determinare esplicitamente l'inverso di f.
(5) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.

Esercizio 3. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (a,x),(c,y) \in A \qquad (a,x)*(c,y) = (a+6+c, \frac{1}{2}yx).$$

(1) Determinare se l'operazione è associativa.
(2) Determinare se l'operazione è commutativa.
(3) Determinare, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A,*)$.
(4) Descrivere, se esiste, in modo esplicito l'inverso di $(-1,2)$ in $(A,*)$.

Esercizio 4. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 26x \equiv 3 \pmod{5} \\ 3x \equiv 18 \pmod{4} \\ 5x \equiv 10 \pmod{35}. \end{cases}$$

Esercizio 5. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{20},+,\cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 6. (1) Stabilire se esiste un grafo con 15 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 3 di grado 4, 3 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.
(2) Stabilire se esiste un albero con 15 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 3 di grado 4, 3 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.

ESONERO DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 22 Dicembre 2020
Traccia: 1

Esercizio 1. Risolvere, se possibile, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} 3x \equiv 6 \pmod{33} \\ 35x \equiv 9 \pmod{4} \\ 5x \equiv 14 \pmod{3}. \end{cases}$$

Esercizio 2. (1) Stabilire se esiste un albero con 16 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 2 di grado 4, 5 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 16 vertici, dei quali: 1 di grado 5, 2 di grado 4, 5 di grado 3, 2 di grado 2 e nessuno di grado maggiore. Se esiste, disegnare il grafico di un tale grafo.

Esercizio 3. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{16}, +, \cdot)$. Inoltre, determinare esplicitamente l'inverso degli eventuali elementi invertibili.

Esercizio 4. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 1 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Determinare esplicitamente l'inverso di f.
(3) Individuare l'ordine di f nel gruppo S_9.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.
(5) Indicare se l'elemento f è pari o dispari.

Esercizio 5. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, s), (z, t) \in A \qquad (x, s) * (z, t) = (\frac{1}{3}xz, t + 3 + s).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Stabilire, se esiste, l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Determinare, se esiste, in modo esplicito l'inverso di $(2, -1)$ in $(A, *)$.

Esercizio 6. Siano $D \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ le seguenti matrici

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, DB e BD.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di B.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di B e di D.

PROVA DI AUTOVALUTAZIONE DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 11 Gennaio 2018

Esercizio 1.
(1) Stabilire se esiste un albero con 8 vertici, dei quali: 4 di valenza 2, 2 di valenza 3 e 2 di valenza 1. Se esiste, disegnare un grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 8 vertici, dei quali: 4 di valenza 2, 2 di valenza 3 e 2 di valenza 1. Se esiste, disegnare un grafico di un tale grafo.
(3) Se esiste un grafo, ne esistono almeno due non isomorfi?

Esercizio 2. Date tre proposizioni R, S ed T, scrivere la tabella di verità di $(R \Longrightarrow S) \wedge (R \Longrightarrow T)$.

Inoltre, stabilire se la proposizione

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \quad \exists t \in \mathbb{R} \text{ tale che } \quad \forall c \in \mathbb{N} \qquad a - c = t^2.$$

è vera o falsa e scrivere la sua negazione.

Esercizio 3. Sia assegnata sull'insieme $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (s,t),(x,y) \in A \qquad (s,t) * (x,y) = (3xs, t + 7 + y).$$

(1) Stabilire se l'operazione $*$ verifica la proprietà associativa e commutativa.
(2) Determinare, se esiste, l'elemento neutro.
(3) Determinare, se esistono, gli elementi invertibili.

Esercizio 4. Siano $D \in Mat_{2\times3}(\mathbb{R})$ e $C \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, DC e CD.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di D e di C.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di D e di C.

Esercizio 5. Dimostrare con il principio di induzione che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n+1} 3^i = \frac{3^{n+2}-1}{6}.$$

Esercizio 6. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se f è pari o dispari.
(3) Calcolare l'ordine di f in S_8.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da f.

PROVA DI AUTOVALUTAZIONE DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica, M-Z
Bari, 13 Dicembre 2018

Esercizio 1. Si consideri sull'insieme $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ la seguente operazione $* : A \times A \to A$, tale che

$$\forall\ (x, y), (a, b) \in A \qquad (x, y) * (a, b) = (\frac{1}{2}xa, 5 + b + y).$$

(1) Stabilire se l'operazione è commutativa.
(2) Stabilire se l'operazione è associativa.
(3) Se esiste, stabilire l'elemento neutro della struttura algebrica $(A, *)$.
(4) Se esiste, scrivere in modo esplicito l'inverso di $(1, 1)$ in $(A, *)$.

Esercizio 2. Consideriamo 7 Canadesi, 9 Messicani e 8 Venezuelani. I Canadesi sono tutte Donne, tra i Messicani ci sono 4 Donne e tra i Venezuelani ci sono 5 Uomini.

a) In quanti modi diversi si può formare un comitato di 9 persone?
b) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità?
c) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed esattamente un uomo?
d) In quanti modi diversi possiamo formare un comitato di 3 persone con un rappresentante per ogni nazionalità ed almeno un uomo?

Esercizio 3. Determinare l'ordine del gruppo $(\mathbb{Z}_{11}^*, \cdot)$. Determinare se il gruppo è ciclico. Determinare l'ordine di tutti i suoi elementi.

Esercizio 4. Siano $A \in Mat_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $B \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare se possibile AB e $A^2 = AA$.
(2) Calcolare se possibile il determinante di A, B e AB.
(3) Calcolare se possibile le matrice inverse di A e AB.

Esercizio 5. In S_9, sia assegnata la seguente permutazione

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 9 & 5 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) Descrivere l'elmento g come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Individuare l'ordine di g nel gruppo S_9.
(3) Determinare esplicitamente l'inverso di g.
(4) Determinare esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da g.
(5) Indicare se l'elemento g è pari o dispari.

Esercizio 6. Stabilire con il principio di induzione se, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\sum_{i=-1}^{n} (6i - 2) = 3n^2 + n - 10.$$

ESONERO DI MATEMATCA DISCRETA

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 21 Dicembre 2011

Esercizio 1. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{24}, +, \cdot)$.

Esercizio 2. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 8 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se f e' pari o dispari.
(3) Calcolare l'ordine di f in S_8.
(4) Calcolare l'ordine del sottogruppo H generato da f.
(5) Scrivere gli elementi del sottogruppo H.

Esercizio 3. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 7i - 2, \; z_2 = 4 - 2i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\frac{1}{z_2}$ e $\frac{z_2}{z_1}$.

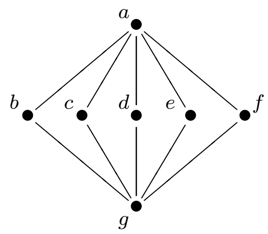
Esercizio 4. Siano $A \in Mat_{4\times 3}(\mathbb{C})$ e $B \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & i \\ 1+i & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \\ -i & i & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AB e BA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di A e di B.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di B.

Esercizio 5. (1) Stabilire se esiste un albero con 7 vertici, 4 dei quali di ordine 3 e gli altri 3 di ordine 1. Se esiste disegnare un grafico.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 7 vertici, 4 dei quali di ordine 3 e gli altri 3 di ordine 1. Se esiste disegnare un grafico.

Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e la relazione $\leq$ e' descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R e' distributivo.
(3) Stabilire se il reticolo R e' di Boole.

Esonero di Matematca Discreta

C.L. Informatica- Sede di Brindisi
Brindisi, 19 Dicembre 2012

Esercizio 1. Determinare gli elementi invertibili e i divisori dello zero nell'anello $(\mathbb{Z}_{22}, +, \cdot)$. Calcolare esplicitamente l'inverso degli elementi invertibili.

Esercizio 2. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 8 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere f come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se f e' pari o dispari.
(3) Calcolare l'ordine di f in S_8.
(4) Calcolare l'ordine del sottogruppo H generato da f.
(5) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo H.

Esercizio 3. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = -1 - 3i, \;\; z_2 = 3 + 4i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

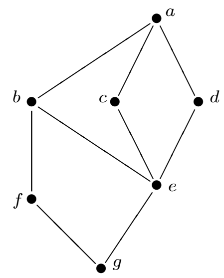
Esercizio 4. Siano $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e $B \in Mat_{3\times 4}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\frac{2}{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AB e BA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di A e di B.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di B.

Esercizio 5. (1) Stabilire se esiste un albero con 8 vertici, 4 dei quali di ordine 3, 2 di grado 2 e gli altri di ordine 1. Se esiste, disegnare un grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con con 8 vertici, 4 dei quali di ordine 3, 2 di grado 2 e gli altri di ordine 1. Se esiste, disegnare un grafico di un tale grafo.

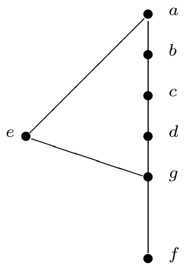
Esercizio 6. Sia assegnato il reticolo $(R, \wedge, \vee)$ associato all insieme parzialmente ordinato $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e la relazione $\leq$ e' descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R e' distributivo.
(3) Stabilire se il reticolo R e' di Boole.

Esonero di Matematca Discreta
C.L. Informatica - Sede di Brindisi
Brindisi, 28 Maggio 2014 - Traccia 2

Esercizio 1. Sia assegnato il reticolo $(R, \wedge, \vee)$ associato ad un insieme parzialmente ordinato $(R, \leq)$, dove $R = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e la relazione $\leq$ è descritta dal seguente diagramma di Hasse:



(1) Determinare gli eventuali complementi di tutti gli elementi di R.
(2) Stabilire se il reticolo R è distributivo.
(3) Stabilire se il reticolo R è di Boole.

Esercizio 2. Siano $A \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ e $B \in Mat_{2\times3}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Calcolare, se possibile, AB e BA.
(2) Calcolare, se possibile, il determinante di A e di B.
(3) Calcolare, se possibile, le matrici inverse di A e di B.

Esercizio 3. Si consideri in S_8 la seguente permutazione

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 8 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

(1) Scrivere h come prodotto di cicli disgiunti.
(2) Stabilire se h è pari o dispari.
(3) Calcolare l'ordine di h in S_8.
(4) Scrivere esplicitamente gli elementi del sottogruppo generato da h.

Esercizio 4. Sia dato il gruppo $(\mathbb{Z}_{17}^*, \cdot)$.
(1) Stabilire se il gruppo è ciclico.
(2) Se il gruppo è ciclico determinare tutti i generatori e gli ordini di tutti gli elementi.

Esercizio 5. Dati i seguenti numeri complessi:

$$z_1 = 2 + \sqrt{3}i, \qquad z_2 = -2 - i.$$

(1) Determinare il modulo di z_1 e z_2.
(2) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $\overline{z_1}$ e $\overline{z_2}$.
(3) Scrivere in forma algebrica i numeri complessi $z_1 z_2$, $\dfrac{1}{z_1}$ e $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Esercizio 6. (1) Stabilire se esiste un albero con 12 vertici, dei quali: 4 di valenza 4, 3 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare un grafico di un tale albero.
(2) Stabilire se esiste un grafo con 12 vertici, dei quali: 4 di valenza 4, 3 di valenza 3, 2 di valenza 2 e nessuno di valenza maggiore. Se esiste, disegnare un grafico di un tale grafo.