**Esercitazione di GEOMETRIA 1**
**C. L. Matematica**
28 Novembre 2019
Traccia A

**Esercizio 1.** Siano assegnate le seguenti funzioni

$$h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, s \in \mathbb{N} \qquad h(s) = 2s^2$$

e

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, n \in \mathbb{R} \qquad g(n) = \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{3}.$$

Stabilire se sono suriettive, iniettive o biettive. Se possibile, determinare le funzioni inverse $g^{-1}$, $h^{-1}$ e la composizione $g \circ h$.

**Esercizio 2.** Si consideri la seguente operazione su $\mathbb{Q}$:

$$* : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \quad \text{tale che} \quad \forall\, (x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \quad x * y = x + y + 2xy.$$

Stabilire se $*$ è associativa, commutativa, se ammette elemento neutro. Infine, determinare gli elementi che ammettono simmetrico.

**Esercizio 3.** Siano $U$ e $V$ i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x+t = 0,\ z = 0\}, \qquad V = \langle (1, 1, 2, -2), (1, 0, 4, -2), (1, 2, 0, -2)\rangle.$$

Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali

$$U, \quad V, \quad U \cap V, \quad U + V.$$

**Esercizio 4.** Sia $V$ il sottospazio vettoriale di $P(3, \mathbb{R}) = \mathbb{R}_3[x]$ generato dai polinomi

$$p_1(x) = 1 + 4x^3, \quad p_2(x) = 2x + 2x^3, \quad p_3(x) = 2 - 2x + 6x^3.$$

a) Determinare una base e la dimensione di $V$.
b) Determinare un supplementare di $V$ in $\mathbb{R}_3[x]$.

**Esercizio 5.** Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} k & -k & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

determinare il rango di $A$, al variare del parametro reale $k$. Se esiste, determinare la matrice inversa di $A$ nel caso $k = 0$.

**Esercitazione di GEOMETRIA 1**
**C. L. Matematica**
28 Novembre 2019
Traccia 1

**Esercizio 1.** Considerata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ k & 1 & 1 \\ 3 & k & -k \end{pmatrix}$$

determinare il rango di $A$, al variare del parametro reale $k$. Se esiste, determinare la matrice inversa di $A$ nel caso $k = 0$.

**Esercizio 2.** Sia $W$ il sottospazio vettoriale di $P(3, \mathbb{R}) = \mathbb{R}_3[x]$ generato dai polinomi

$$p_1(x) = 2 - x^2 + 4x^3, \quad p_2(x) = -1 + 3x^2 + 3x^3, \quad p_3(x) = 2x^2 + 4x^3.$$

a) Determinare una base e la dimensione di $W$.
b) Determinare un supplementare di $W$ in $\mathbb{R}_3[x]$.

**Esercizio 3.** Siano $U$ e $W$ i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$U = \langle (2, 1, -1, 3), (-7, 1, 2, 3), (-1, 1, 0, 3) \rangle, \qquad W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 0,\ 3y - t = 0\}.$

Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali

$$U, \quad W, \quad U \cap W, \quad U + W.$$

**Esercizio 4.** Si consideri la seguente operazione su $\mathbb{R}$:

$$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{tale che} \quad \forall\, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad a * b = 3ab + a + b.$$

Stabilire se $*$ è associativa, commutativa, se ammette elemento neutro. Infine, determinare gli elementi che ammettono simmetrico.

**Esercizio 5.** Siano assegnate le seguenti funzioni

$$h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R} \qquad h(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{3}t^3$$

e

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R} \qquad \text{tale che} \qquad \forall\, b \in \mathbb{Z} \qquad f(b) = 4 + 3b^4.$$

Stabilire se sono suriettive, iniettive o biettive. Se possibile, determinare le funzioni inverse $h^{-1}$, $f^{-1}$ e la composizione $h \circ f$.

**Esercitazione di GEOMETRIA 1**
**C. L. Matematica**
20 Gennaio 2020
Traccia 1

**Esercizio 1.** Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da
$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - 2z^2 - 4xz - 2yz$$
e sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata a $q$.

(a) Determinare la matrice associata a $b$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare il rango di $b$.
(c) Determinare la segnatura di $b$.
(d) Determinare l'espressione canonica di $q$ e una base di $\mathbb{R}^3$ che la realizza.

**Esercizio 2.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da
$$f(x, y, z) = (-3x + y + 4z,\ 3x - y + 2z).$$

(a) Determinare la matrice associata a $f$ rispetto alla base $\mathscr{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathscr{B}' = \{(2, -2), (1, 2)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(b) Determinare la dimensione e una base per gli spazi vettoriali $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$, stabilendo se $f$ è ingettiva e/o surgettiva.

**Esercizio 3.** Si consideri il seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -1 \\ 6x - 4y + 2z = 7 \\ \quad -2y + 2z = 3. \end{cases}$$
Stabilire se il sistema è compatibile e, in caso affermativo, determinare tutte le soluzioni.

**Esercizio 4.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
$$f(x, y, z) = (-x + 6y - 2z,\ 2y - z,\ -z).$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di $f$.
(b) Stabilire se $f$ è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $f$.

**Esercitazione di GEOMETRIA 1**
**C. L. Matematica**
20 Gennaio 2020
Traccia B

**Esercizio 1.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da
$$f(x, y, z) = (2x - y - 2z,\ -2x + y + 3z).$$

(a) Determinare la matrice associata a $f$ rispetto alla base $\mathscr{B} = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (-1, -1, -1)\}$ di $\mathbb{R}^3$ e alla base $\mathscr{B}' = \{(-1, 1), (1, -3)\}$ di $\mathbb{R}^2$.
(b) Determinare la dimensione e una base per gli spazi vettoriali $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$, stabilendo se $f$ è ingettiva e/o surgettiva.

**Esercizio 2.** Si consideri il seguente sistema lineare:
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + 3y = 1 \\ 4x + 5y + 2z = -1. \end{cases}$$
Stabilire se il sistema è compatibile e, in caso affermativo, determinare tutte le soluzioni.

**Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da
$$f(x, y, z) = (-3x - y + 2z,\ -3y,\ -2y + z).$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di $f$.
(b) Stabilire se $f$ è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $f$.

**Esercizio 4.** Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da
$$q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - z^2 - 2xy - 4yz$$
e sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata a $q$.

(a) Determinare la matrice associata a $b$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare il rango di $b$.
(c) Determinare la segnatura di $b$.
(d) Determinare l'espressione canonica di $q$ e una base di $\mathbb{R}^3$ che la realizza.

**Esercitazione di GEOMETRIA 1**
**C. L. Matematica**
27 Febbraio 2020
Traccia C

**Esercizio 1.** Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z, t) = (x - y + 2t,\ 2x + 2y - z + t, -x - 7y + 2z + 4t).$$

(a) Determinare la matrice associata a $f$ rispetto alla base $\mathscr{B} = \{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (-1, -1, -1, -1), (0, 1, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^4$ e alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare la dimensione e una base per gli spazi vettoriali $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$, stabilendo se $f$ è ingettiva e/o surgettiva.

**Esercizio 2.** Siano $W$ e $V$ i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ definiti da

$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, y = 0,\ 3z+t = 0\}$, $\qquad V = \langle(-1, 1, 2, 2), (2, -1, -2, -2), (0, 1, 2, -2)\rangle$.

Determinare la dimensione e una base degli spazi vettoriali

$$W, \quad V, \quad W \cap V.$$

**Esercizio 3.** Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f(x, y, z) = (-x,\ 2x + 4y,\ -x - \frac{5}{2}y - z).$$

(a) Determinare il polinomio caratteristico di $f$.
(b) Stabilire se $f$ è diagonalizzabile e, in caso positivo, determinare una base $\mathscr{B}$ di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $f$.

**Esercizio 4.** Sia $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da

$$q(x, y, z) = x^2 - y^2 - 2z^2 + 2xy + 4xz$$

e sia $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata a $q$.

(a) Determinare la matrice associata a $b$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
(b) Determinare il rango di $b$.
(c) Determinare la segnatura di $b$.
(d) Determinare l'espressione canonica di $q$ e una base di $\mathbb{R}^3$ che la realizza.