

Donatella Iacono

Sabina Milella

MATEMATICA
e
FORME



Surfer



Big Data

Polynomiography



Shape-from-Shading

SURFER

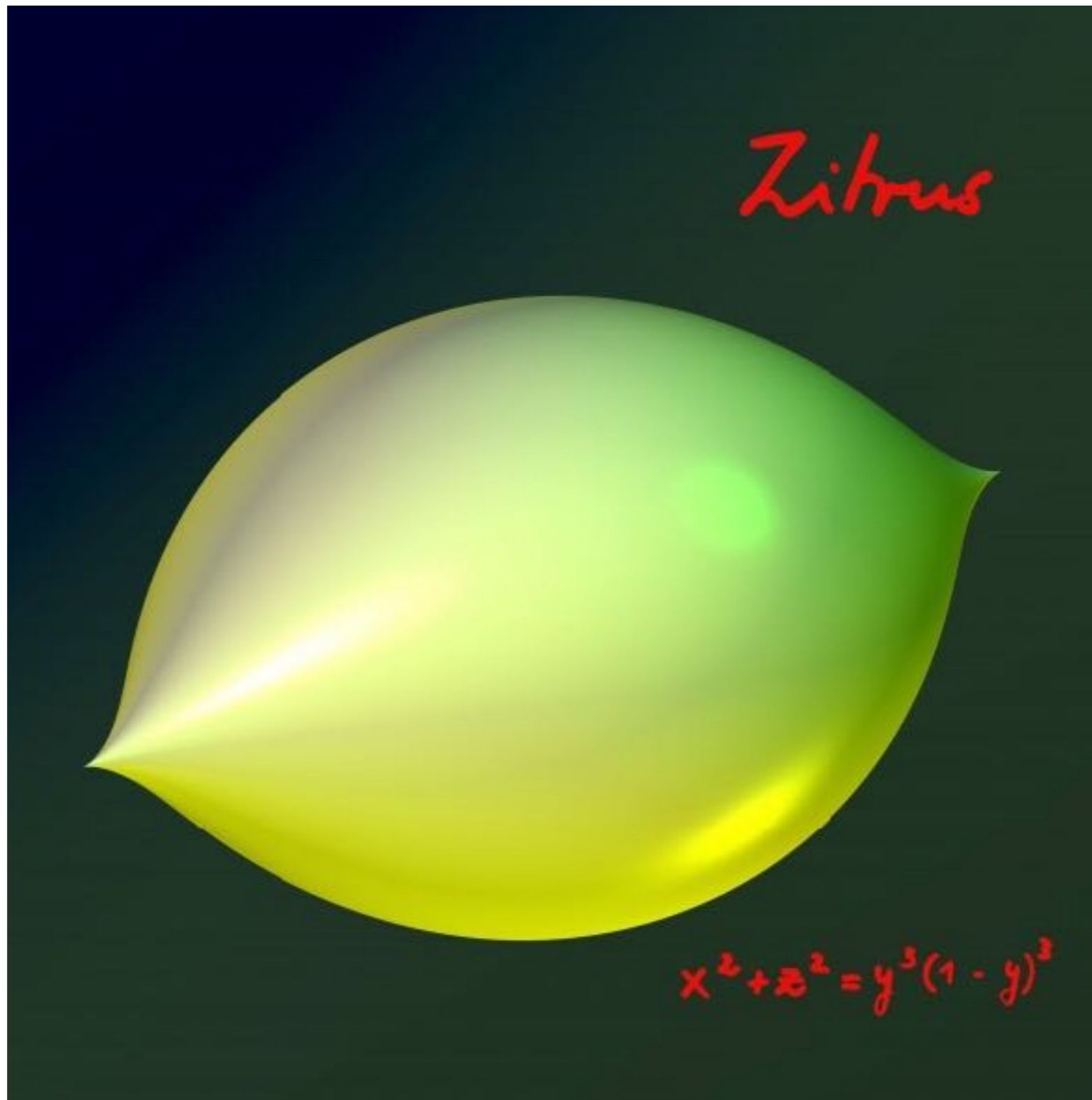
Software creato da Mathematisches
Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO)
in collaborazione con Martin Luther University
Halle-Wittenberg

Fa parte della mostra itinerante IMAGINARY
organizzata da Mathematisches
Forschungsinstitut Oberwolfach.

Superfici come insieme di soluzioni di equazioni algebriche

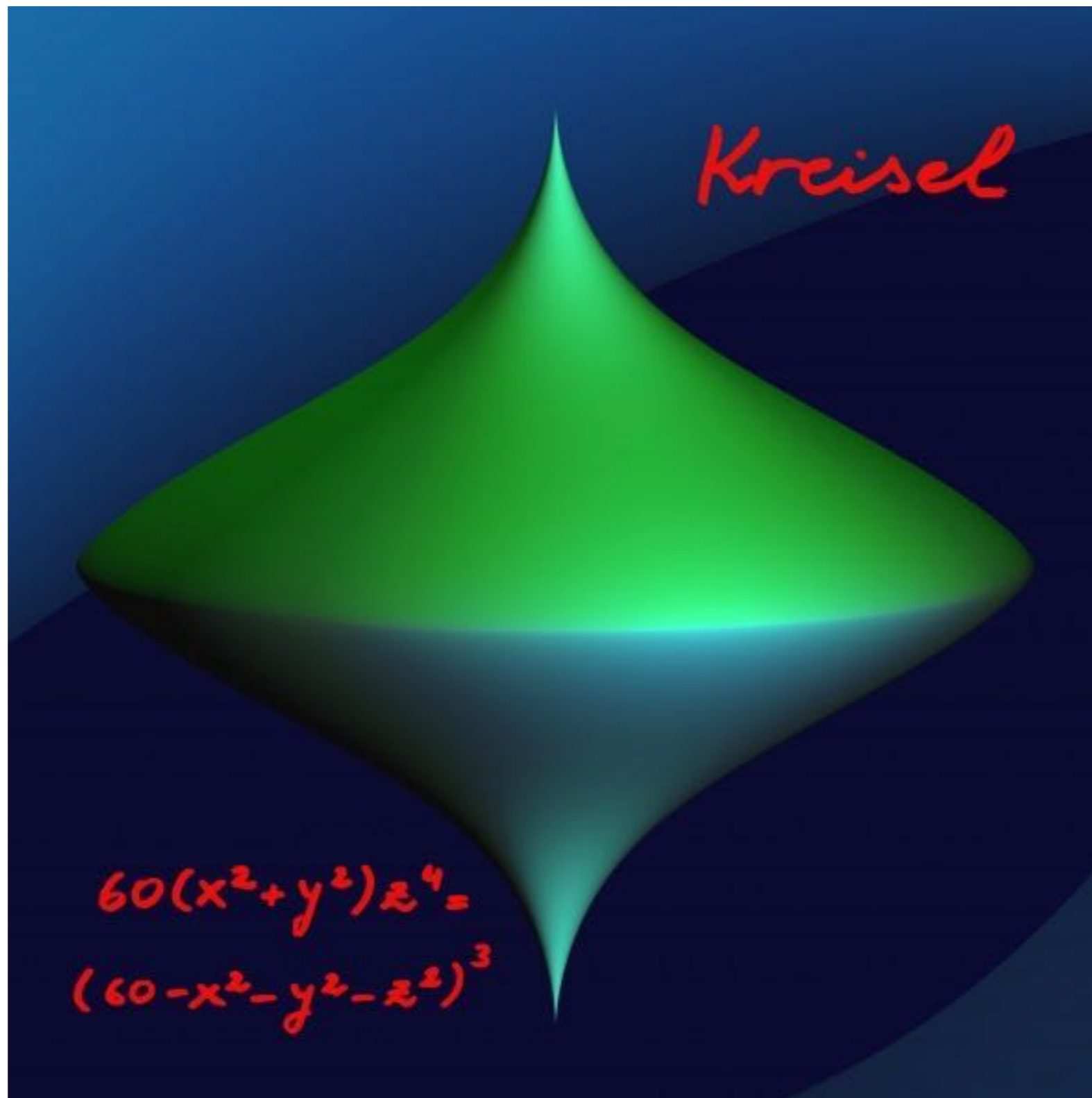
Zeri di polinomi $P(x,y,z)=0$

?

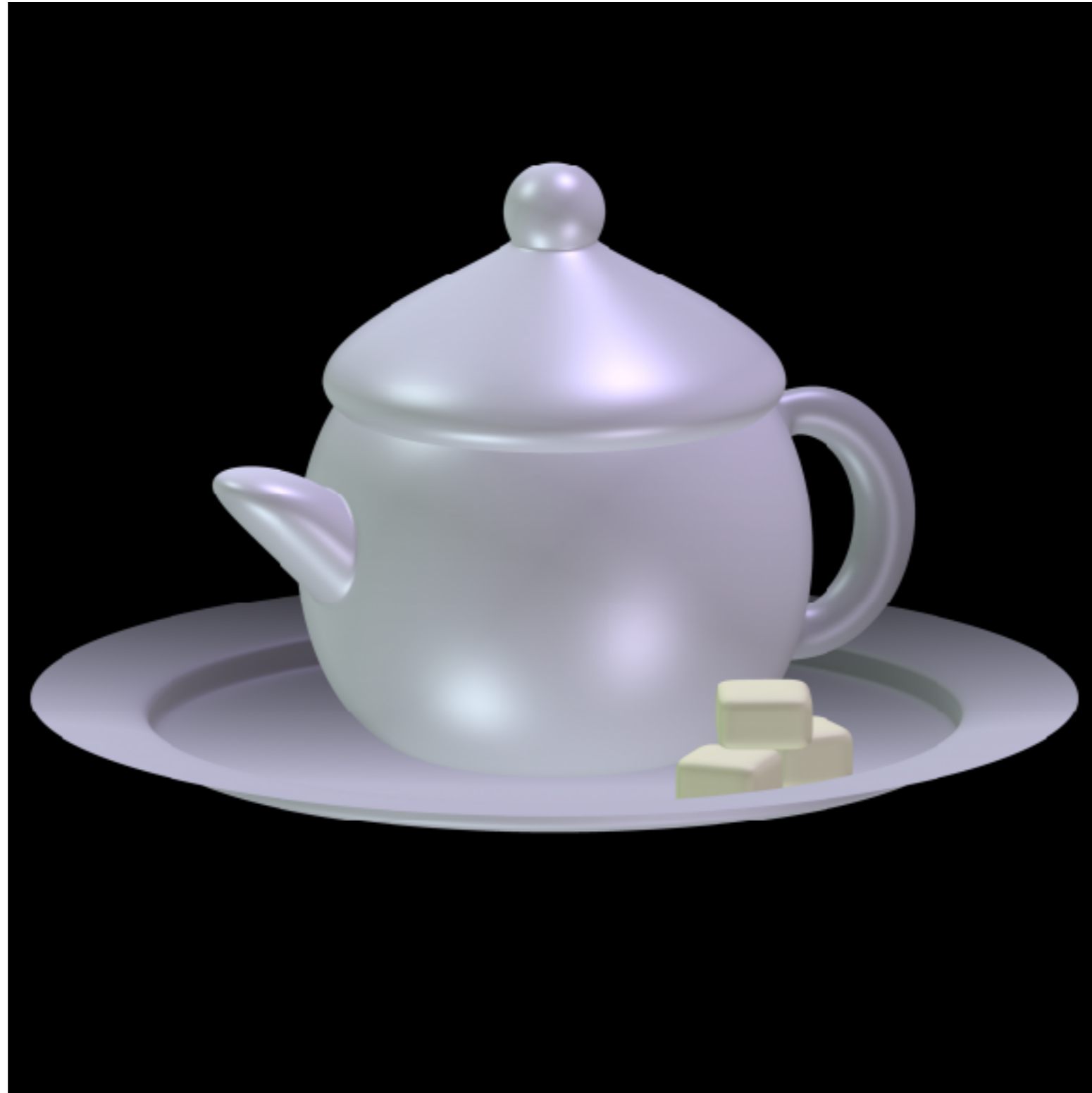


$$P(x,y,z)=x^2+z^2-y^3(1-y)^3$$

Autore: Herwig Hauser



Autore: Herwig Hauser



Autore: Valentina Galata



$$(4 \cdot (x + z + 0.55)^2 + 4y^2 + 200z^6 - 0.1) \cdot ((2.5x^2 + 2.5y^2 + z^2)^2 - (2.5x^2 + 2.5y^2)) \\ \cdot ((40 \cdot (x - 0.65)^2 + 40y^2 + 30z^2 + 2)^2 - 9 \cdot (30z^2 + 40x - 0.65)^2) - 8 \cdot (0.7x - 0.65) \\ - 0.4 = 0$$

$$(0.45x^2 + 0.45y^2 + 2 \cdot (1.6z - 1.39)^3 \cdot (1 + (1.35z - 1.37))) \cdot (x^2 + y^2 + (z - 0.85)^2 - 0.015) \\ - 0.000001 = 0$$

$$10y^2 + 10x^2 - 10 - (20z + 9)^5 = 0$$

$$((2x - 0.8)^6 + (2y + 1.15)^6 + (3z + 1.31)^6 - 0.0001) \\ \cdot (((1.35x + 0.9 + 1.35y)^6 + (1.35y + 1.2 - 1.35x)^6 + (3z + 1.31)^6 - 0.0001) = 0$$

$$(0.7x + 1 + 0.7y + y)^6 + (0.7y + 0.9 - 0.7x - x)^6 + (3z + 0.9)^6 - 0.0001 = 0$$

Piatto: $10y^2+10x^2-10-(20z+9)^5$



Autore: Valentina Galata



$$((0.99z - 4.7)^2 + (0.7y - 2)^2 - (0.8x + 3)) \cdot ((2z - 9)^2 + (0.5y + 1)^2 - (x + 3)) \cdot (x + 0.8) \\ \cdot ((0.5z - 1)^2 + (0.8y + 4.3 - (0.5z - 0.6))^2 - (x + 3)) + 25 = 0$$

$$((x + 1.2)^6 + (0.7y + 2.1)^6 + (0.8z + 0.5)^6 - 1) \cdot (0.0001 \cdot (x + 2)^{12} + (y + 1)^{12} + z^{12} - 0.01) \\ = 0$$

$$(x + 2 + (0.6y + 1.8))^6 + (0.6y + 1.8 - (x + 2))^6 + (0.9z + 0.6)^6 - 1 = 0$$

$$((x + 2.5)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2 - 0.8) \cdot ((x + 2.5)^2 + (y - 3.2)^2 + (z - 2)^2 - 0.4) \\ \cdot ((x + 3.2)^2 + (y - 3.6)^2 + (z - 2.4)^2 - 0.2) - 0.01 = 0$$

$$((12 \cdot (y - 2)^2 + 12 \cdot (x + 5.7)^2 + 12 \cdot (z - 1)^2 + 2)^2 - 9 \cdot (12 \cdot (x + 5.7)^2 + 12 \cdot (y - 2)^2) \\ - 7 \cdot (y - 2)) = 0$$

$$(0.63^2 x + 2.35)^6 - 2 \cdot (0.63^2 x + 2.35)^3 + 1 + (z^2 + (y + 1)^2 - 1)^3 = 0$$

$$((x + 2.55)^6 + (y + 1)^6 + (z + 0.459)^6 - 0.0009) \cdot ((x + 1.445)^6 + (y + 3.6)^6 + (z + 1.53)^6 \\ - 0.005) = 0$$



Autore: Valentina Galata



$$\begin{aligned}
 &0 = ((3.4 * x^2 + 3.4 * y^2 + 1.1 * (z + 0.3)^2 + 0.15)^2 - 4 * (x^2 + y^2)) \\
 &* (1.5 * x^2 + 1.5 * (y - 0.1)^2 + (0.6 * z - 0.2)^2 - 0.1) * (x^2 + (y + 0.1)^2 + (z - 1)^2 - 0.01) \\
 &- 0.03 \\
 &0 = ((2.3 * x)^2 + (2.3 * y)^2 + (1.5 * z + 1)^3 * (1 + 1.5 * z + 1) - 0.1) \\
 &* (x^2 + (y + 0.1)^2 + (1.2 * z + 1.6)^2 - 0.05) * (x^2 + (y + 0.2)^2 + (z + 0.4)^2 - 0.01) - 0.007 \\
 &0 = ((x - 0.2)^2 + (y)^2 + (z - 0.8)^2 - 0.01) * ((x - 0.13)^2 + (y - 0.3)^2 + (z - 0.3)^2 - 0.02) \\
 &* ((x - 0.35)^2 + (y + 0.1)^2 + (z - 0.05)^2 - 0.015) * ((x - 0.2)^2 + (y - 0.4)^2 + (z + 0.3)^2 \\
 &- 0.01) * ((x - 0.37)^2 + (y + 0.27)^2 + (z + 0.48)^2 - 0.005) \\
 &0 = (x^2 + (y - 0.45)^2 + (1.1 * z + 1.2)^2 - 0.08) * ((x)^2 + (y - 0.6)^2 + (z + 1.5)^2 - 0.007) \\
 &+ 0.003 \\
 &0 = (2.2 * x)^2 + (2.2 * y - 1)^2 + (2 * z + 2)^3 * (1 + 2 * z + 2) + 0.001 \\
 &0 = ((x - 0.1)^2 + (y - 0.6)^2 + (z + 0.965)^2 - 0.005) * ((x - 0.17)^2 + (y - 0.34)^2 + (z + 1.1)^2 \\
 &- 0.005) * ((x - 0.08)^2 + (y - 0.365)^2 + (z + 0.92)^2 - 0.005) \\
 &* ((x - 0.162)^2 + (y - 0.53)^2 + (z + 1.12)^2 - 0.005)
 \end{aligned}$$

SHAPE from SHADING

Cosa significa? Foto+Matematica=Shape

Applicazioni:

Arte

Self-driving car

Stampa 3d

Biomedicina

Come funziona?

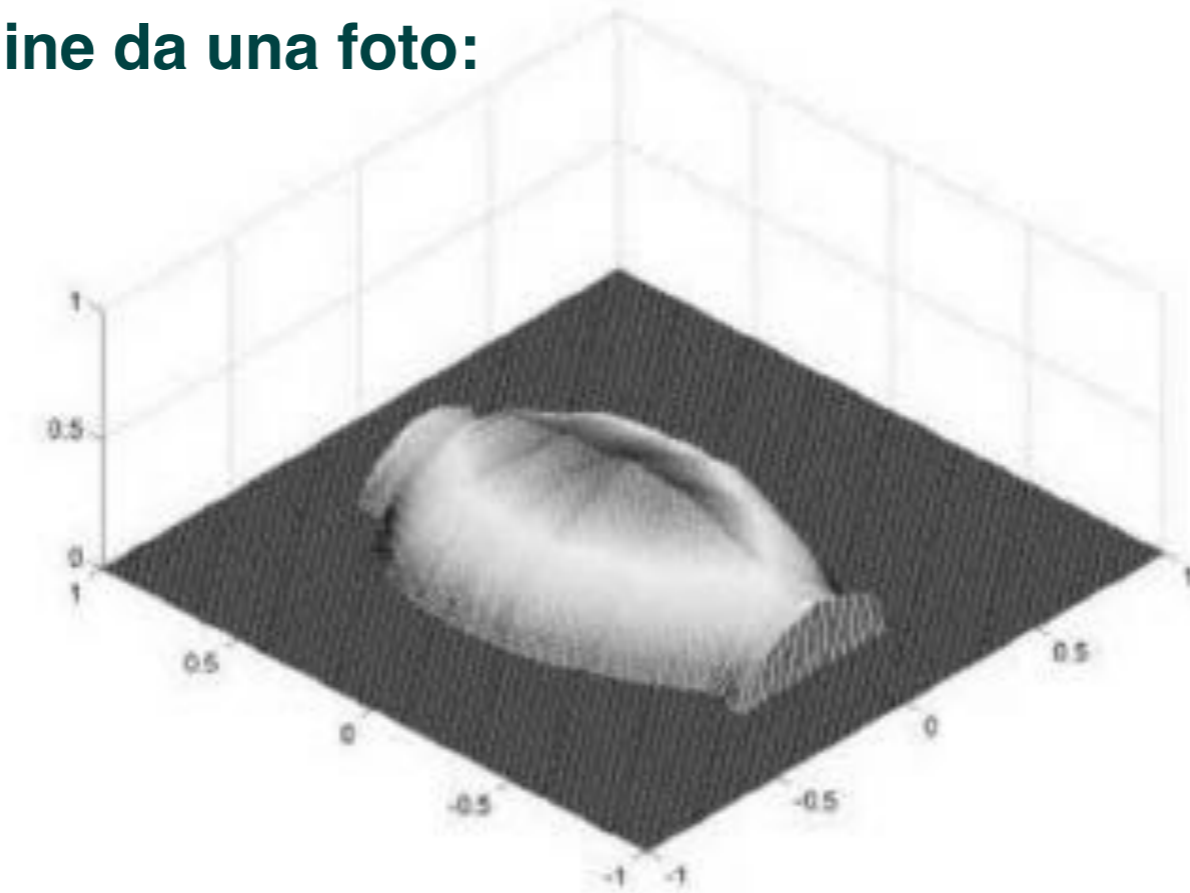
con la **Matematica!!**



Ricostruire una immagine da una foto:

M.J. Brooks, E. Cristiani, M. Falcone, B.K.P. Horn, O. Vogel,

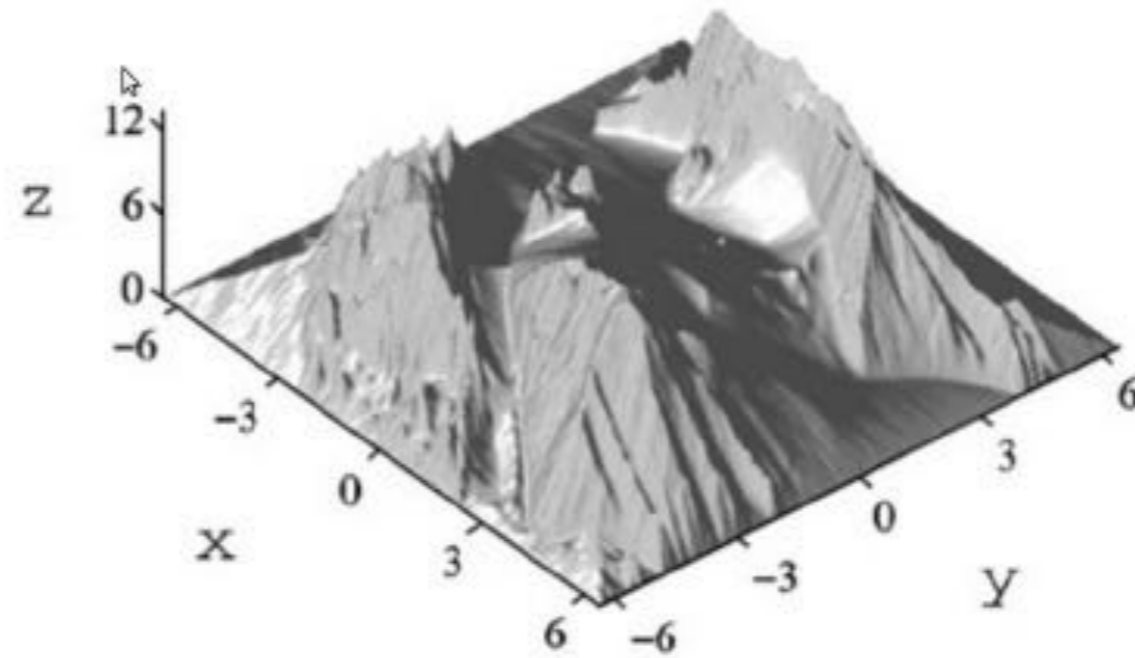
Ricostruire una immagine da una foto:



proviamo con Lena

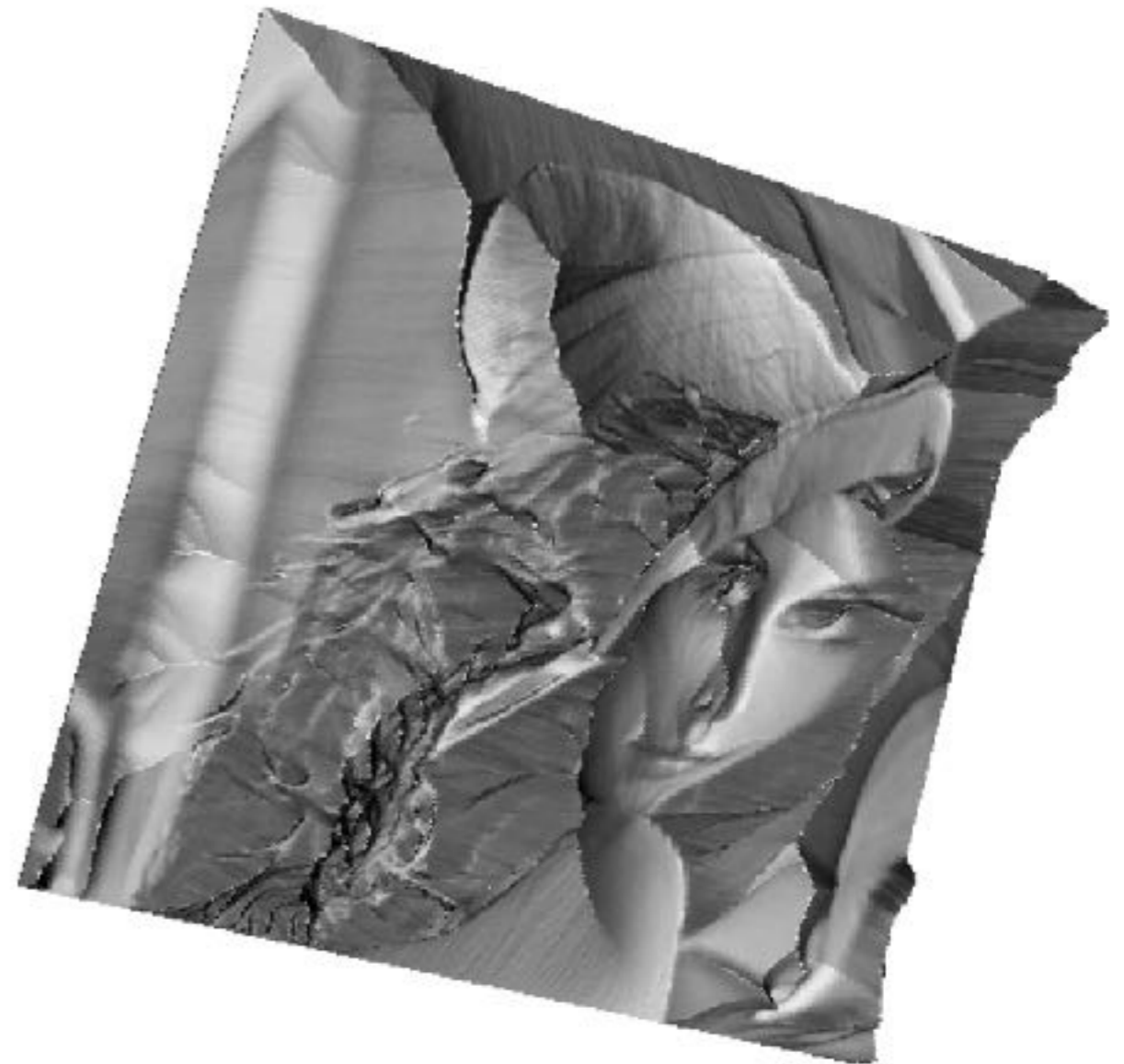
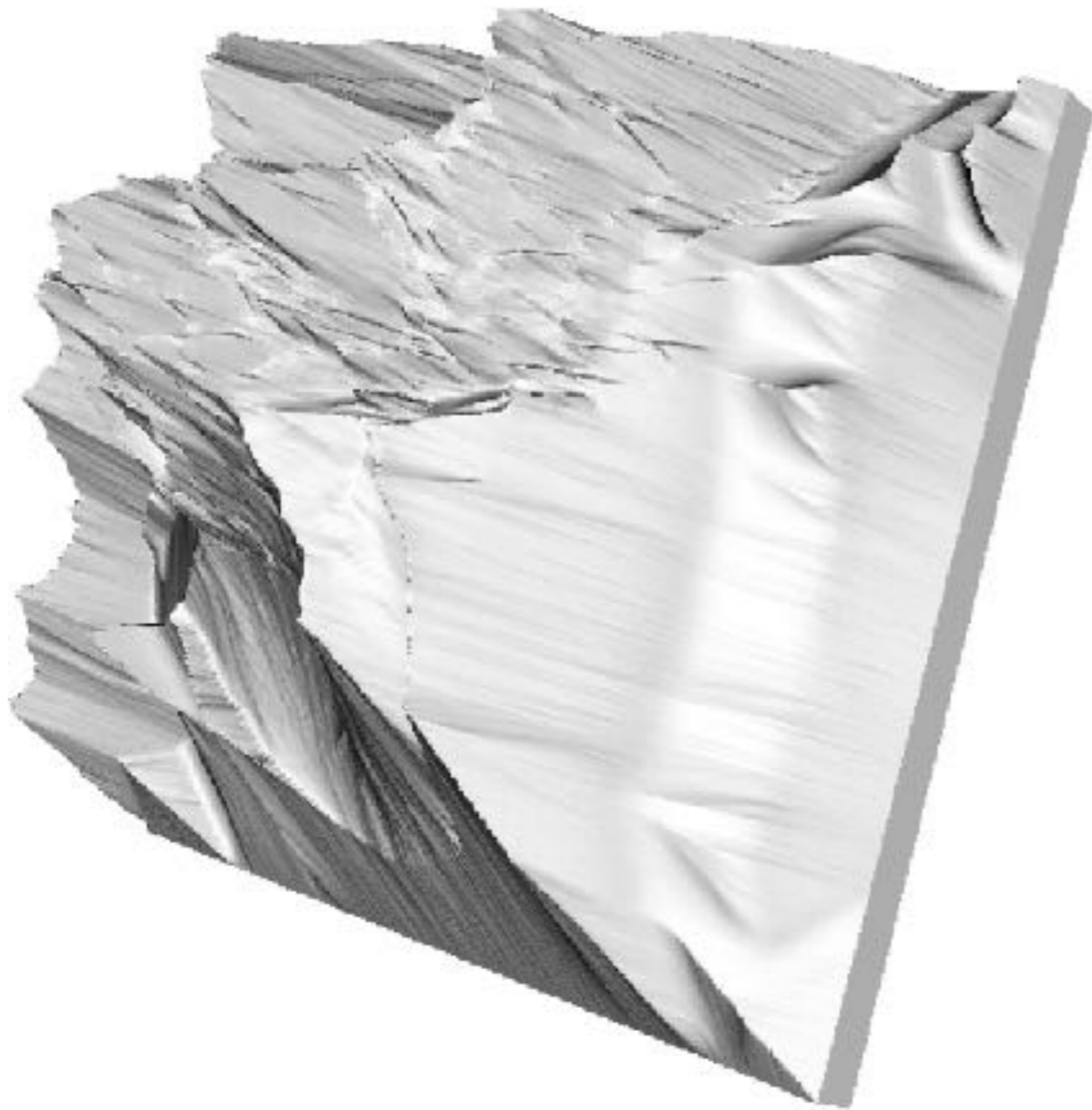


mmm.... povera Lena



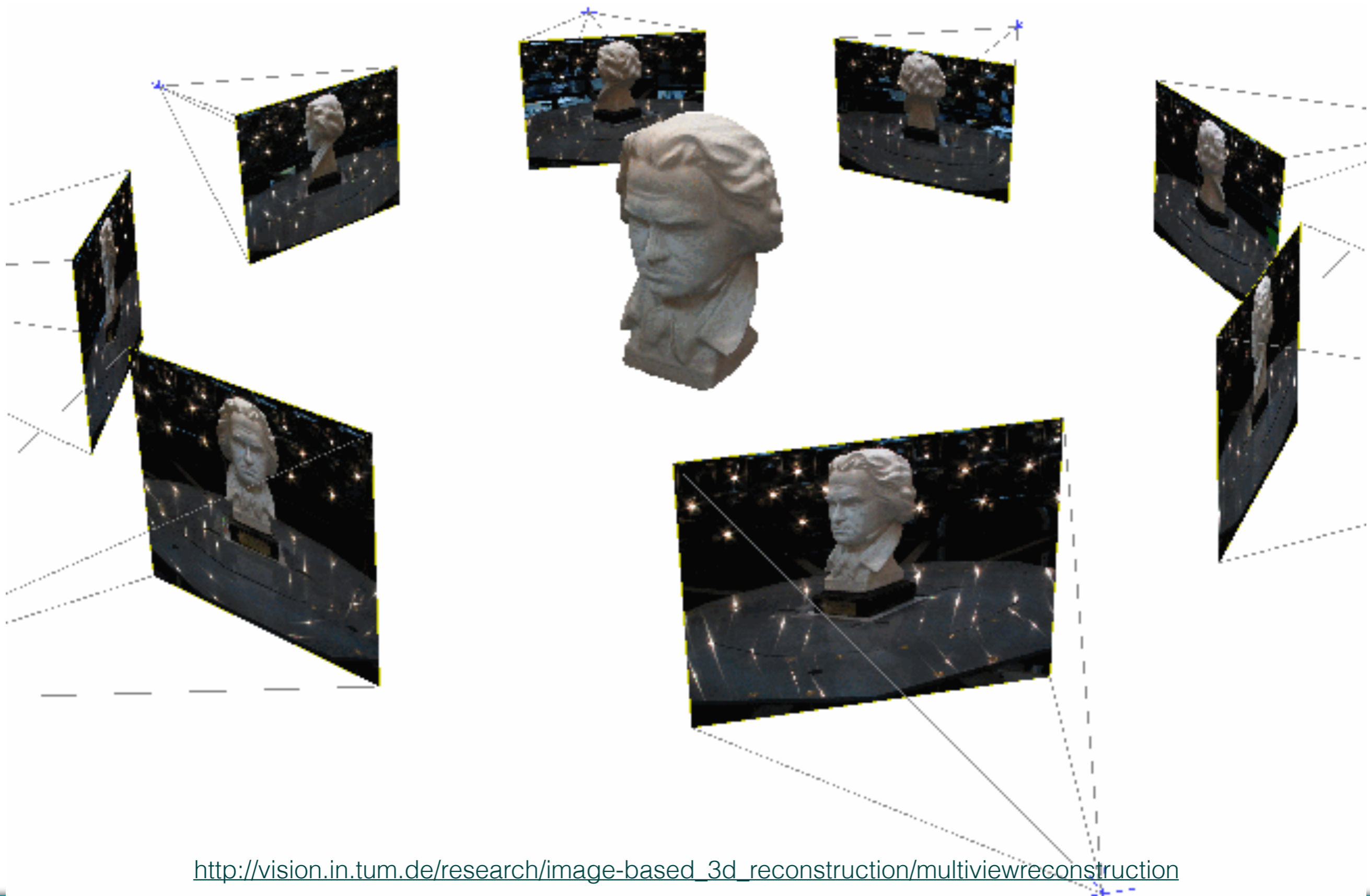
SHAPE-from-SHADING

se non stiamo attenti la soluzione non e' unica!



<http://www.emilianocristiani.it/pubs.htm#sfs>

SHAPE-from-SHADING



http://vision.in.tum.de/research/image-based_3d_reconstruction/multiviewreconstruction

POLYNOMIOGRAPHY

Software creato da Bahman Kalantari
Department of Computer Science, Rutgers University

Immagini in \mathbb{R}^2 ottenute approssimando gli zeri di polinomi complessi

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

?

Teorema fondamentale dell'Algebra \rightarrow Esistenza

Approssimazione degli zeri \leftrightarrow Ricerca degli zeri attraverso
processi iterativi, algoritmi...limiti di **successioni**

$u \rightarrow L(u) \rightarrow L(L(u)) \rightarrow L(L(L(u))) \dots \rightarrow$ zero di P

Teorema fondamentale dell'Algebra \rightarrow Esistenza

Approssimazione degli zeri \leftrightarrow Ricerca degli zeri attraverso processi iterativi, algoritmi...limiti di **successioni**

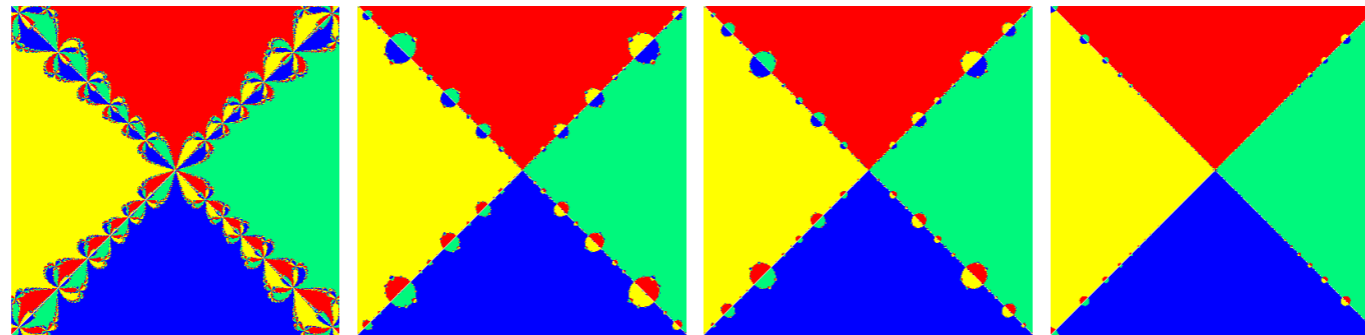
$u \rightarrow L(u) \rightarrow L(L(u)) \rightarrow L(L(L(u))) \dots \rightarrow$ zero di P

- esistono numerose funzioni L
- non è detto che ci sia convergenza
- u diverse possono dare zeri diversi

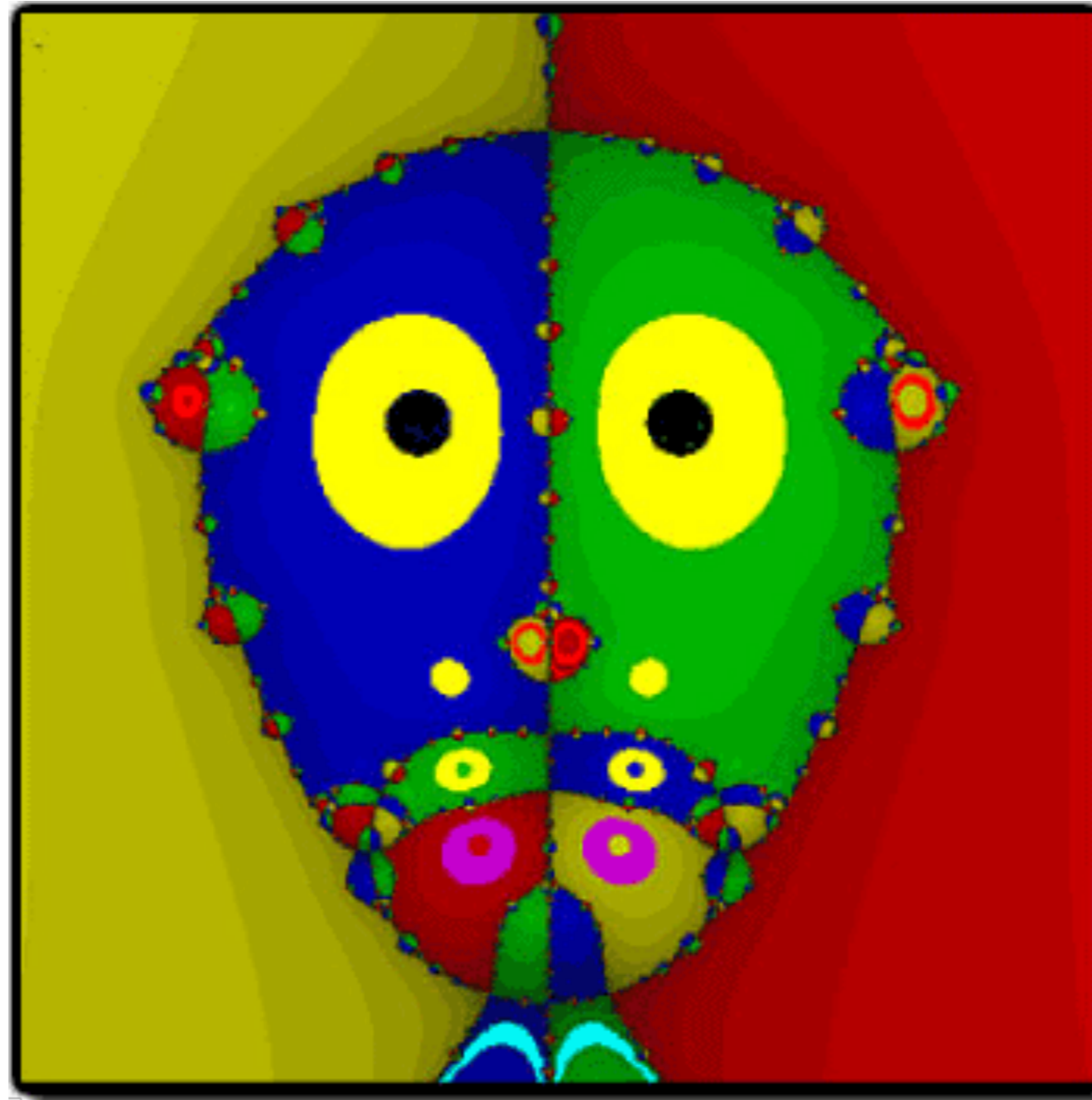
$P(z)=z^2-1$ ha 2 zeri reali

$P(z)=z^2+1$ ha 2 zeri complessi

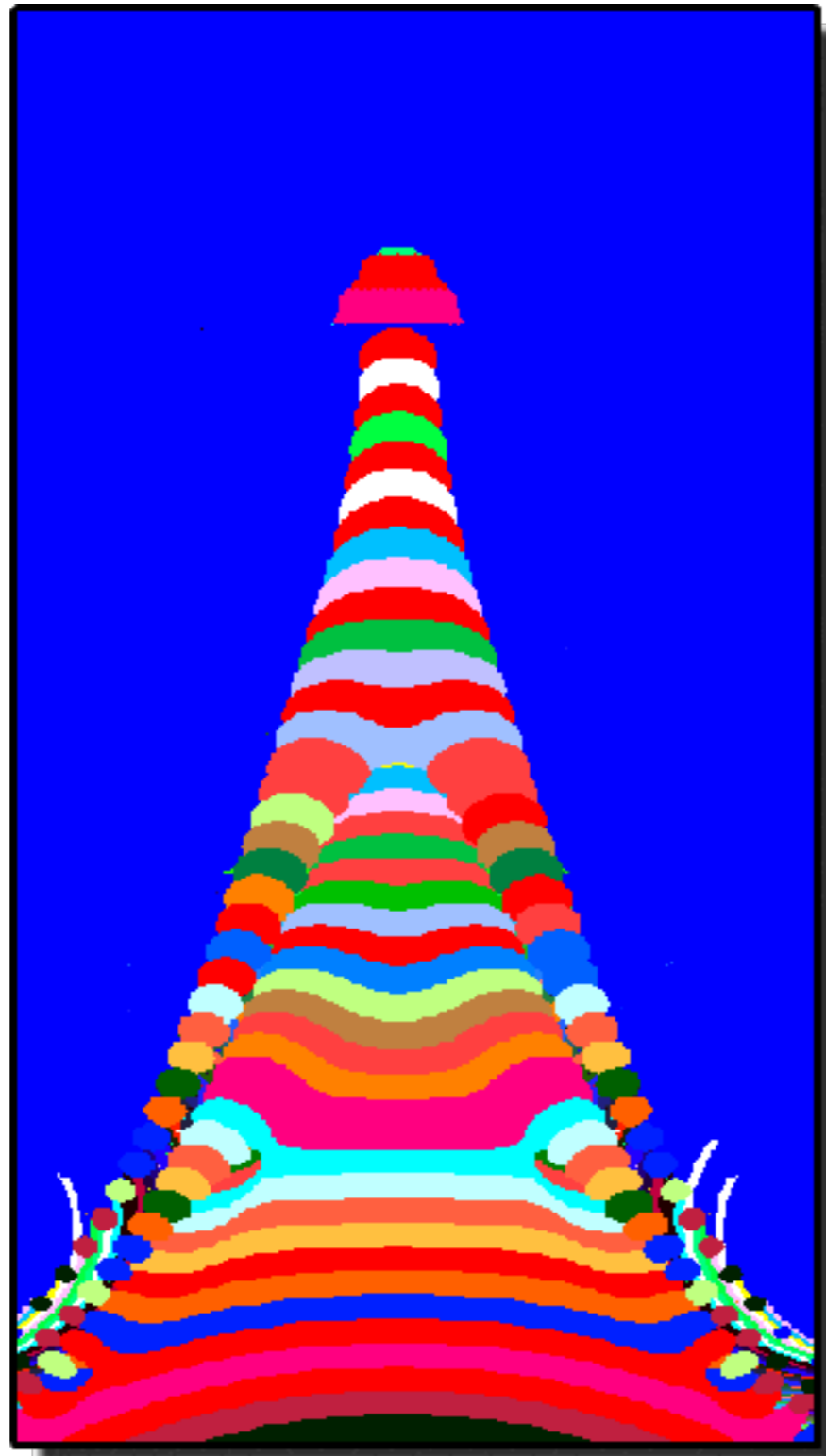
$P(z)=z^4-1$ ha 4 zeri complessi...



- funzioni L diverse danno “polinomiografi” diversi
- le 4 aree più grandi rappresentano i “bacini di attrazione”



Autore: Bohman Kalantari



Eiffel Tower

Autore: Bohman Kalantari



Mona Lisa

Autore: Bohman Kalantari



Autore: Bohman Kalantari

Un polinomio grafo può rappresentare anche un codice numerico...



Autore: Bohman Kalantari

Polinomiografo del numero 672123450 \longleftrightarrow zeri di $P(z)=6z^8+7z^7+2z^6+z^5+2z^4+3z^3+4z^2+5z$

BIG DATA

BIG DATA

and the hidden shapes

Cosa sono? Quantità **enorme** di dati

Chi li crea? Noi

Come? Con tutti i dati che generiamo usando le nuove tecnologie informatiche

Promemoria sulla Privacy di Google

Dati elaborati quando si utilizza Google

- Ad esempio, quando cerchi un ristorante su Google Maps o guardi un video su YouTube, elaboriamo le informazioni relative a quella attività, che possono includere il video visualizzato, gli ID del dispositivo, gli indirizzi IP, i dati dei cookie e la posizione.
- I tipi di informazioni sopra descritti vengono elaborati anche quando utilizzi app o siti che ricorrono a servizi Google, come gli annunci, Analytics e il video player di YouTube.

Esempio: Natural Image Statistic

G. Carlsson, A.B. Lee, K.S. Pedersen, D. Mumford, A. Zomorodian

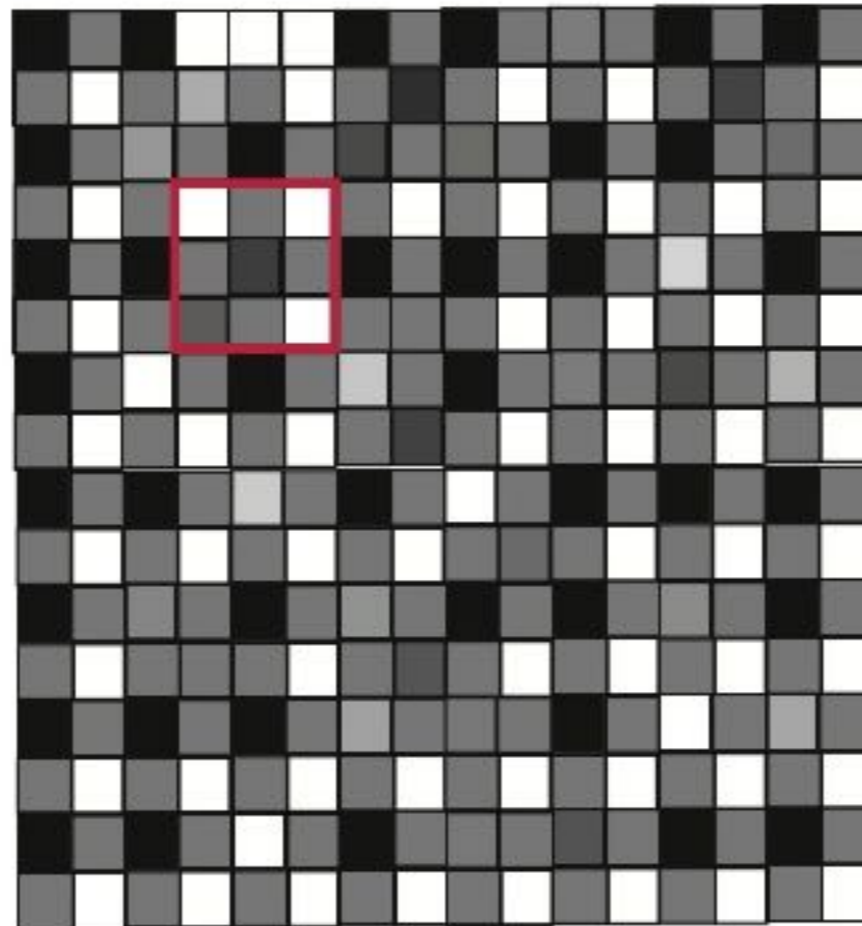
Immagini in bianco e nero:

ogni pixel 256 possibilità, quindi possiamo pensare l'immagine in uno spazio multidimensionale \mathbb{R}^p , p numero di pixels

Problema:

Capire se l'insieme dei punti che corrispondono alle immagini hanno una SHAPE

Idea: (D. Mumford, ...) Considerano un database di immagini di J. van Harten e A. van Schaaf e in ogni immagine scelgono 3x3 patches.



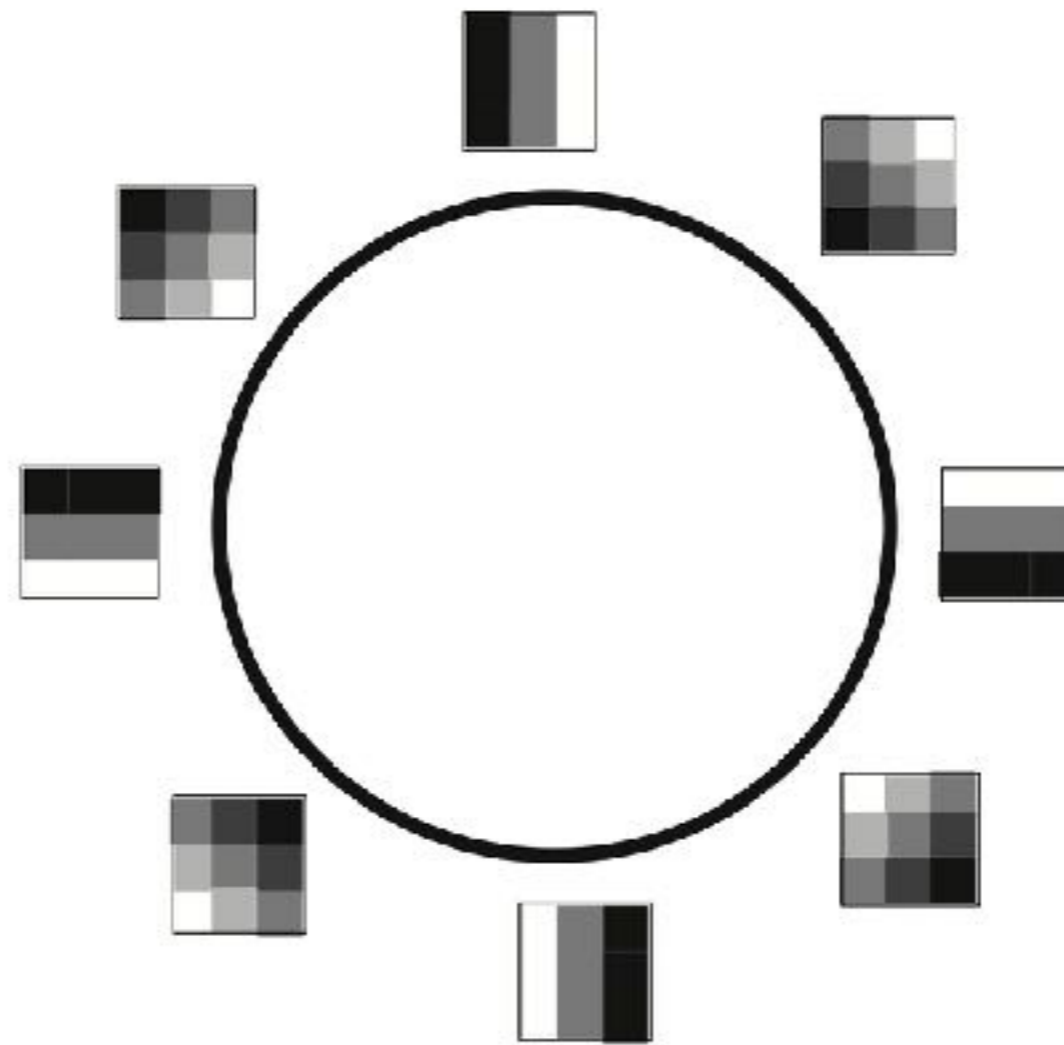
Idea: (D. Mumford, ...) Considerano un database di immagini di J. van Harten e A. van Schaaf e in ogni immagine scelgono 3x3 patches.

Selezionano 5000 patches ad alto contrasto, che possono essere visti in \mathbb{R}^9

Attraverso **la matematica** ottengono....

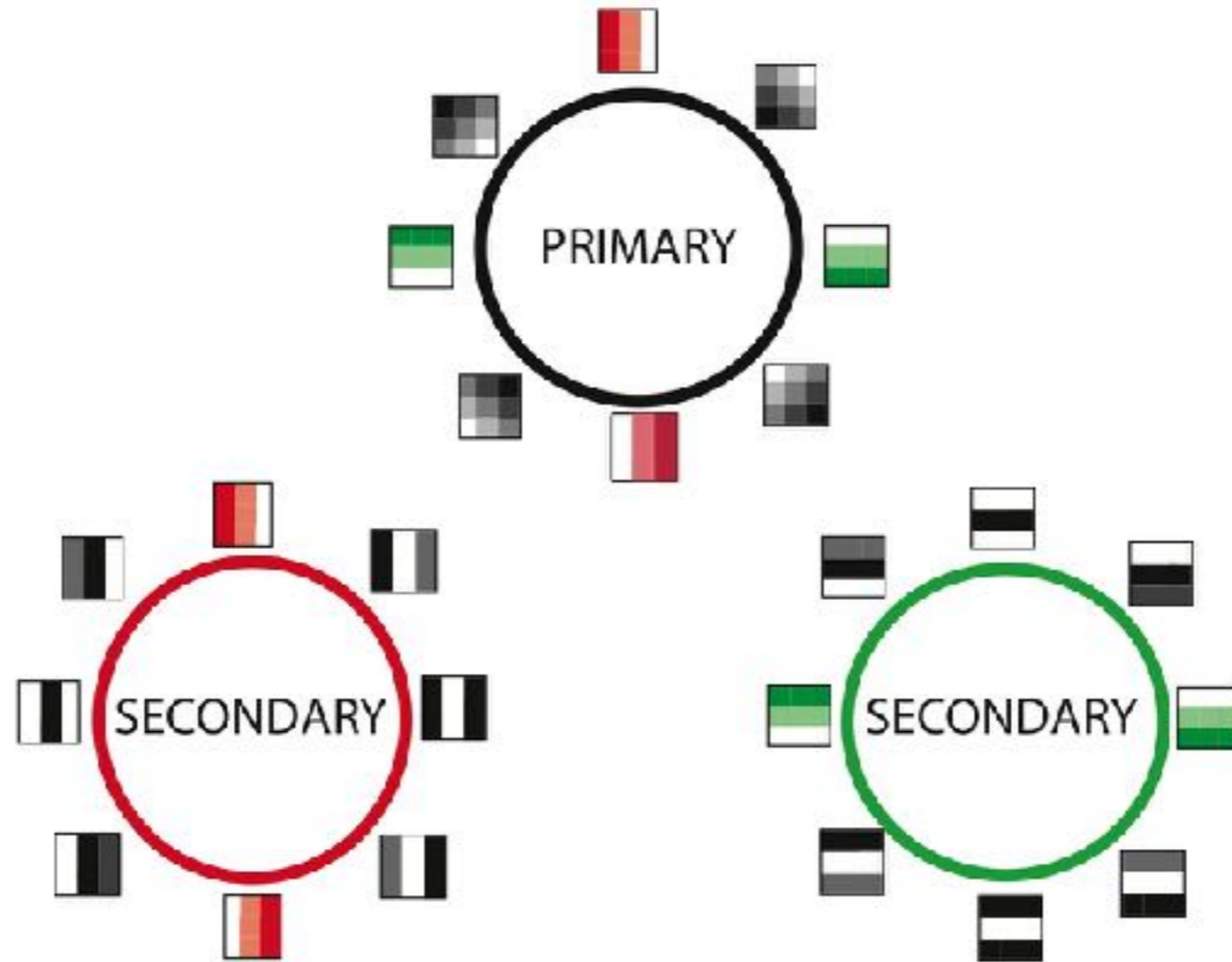
una forma geometrica: “ellissoide 7 dimensionale in \mathbb{R}^8 ”

In realtà: ci sono zone con densità più alta, che corrispondono a patches più frequenti....e anche da qui ottengono altre forme....

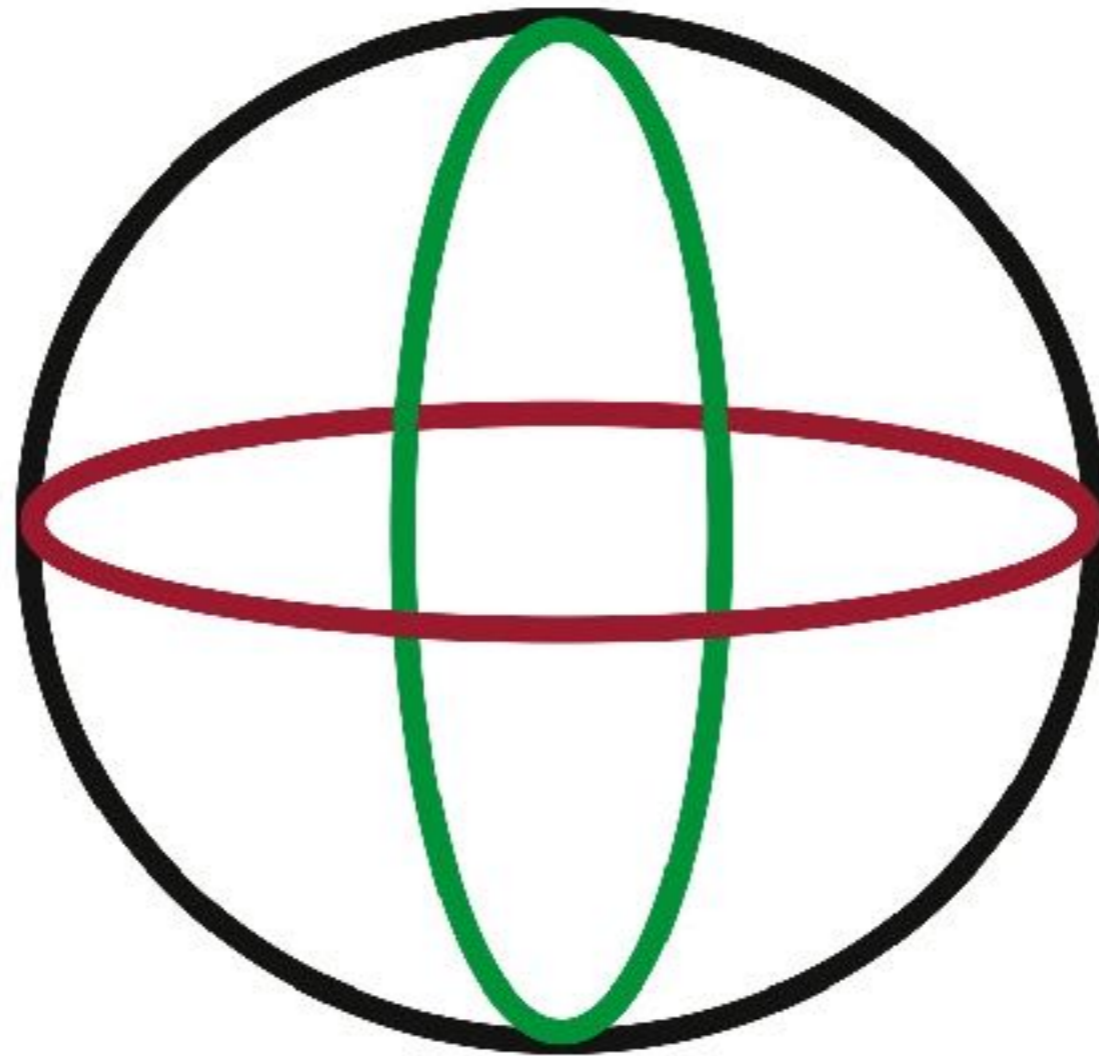


Primary circle

In realtà: ci sono zone con densità più alta, che corrispondono a patches più frequenti....e anche da qui ottengono altre forme....

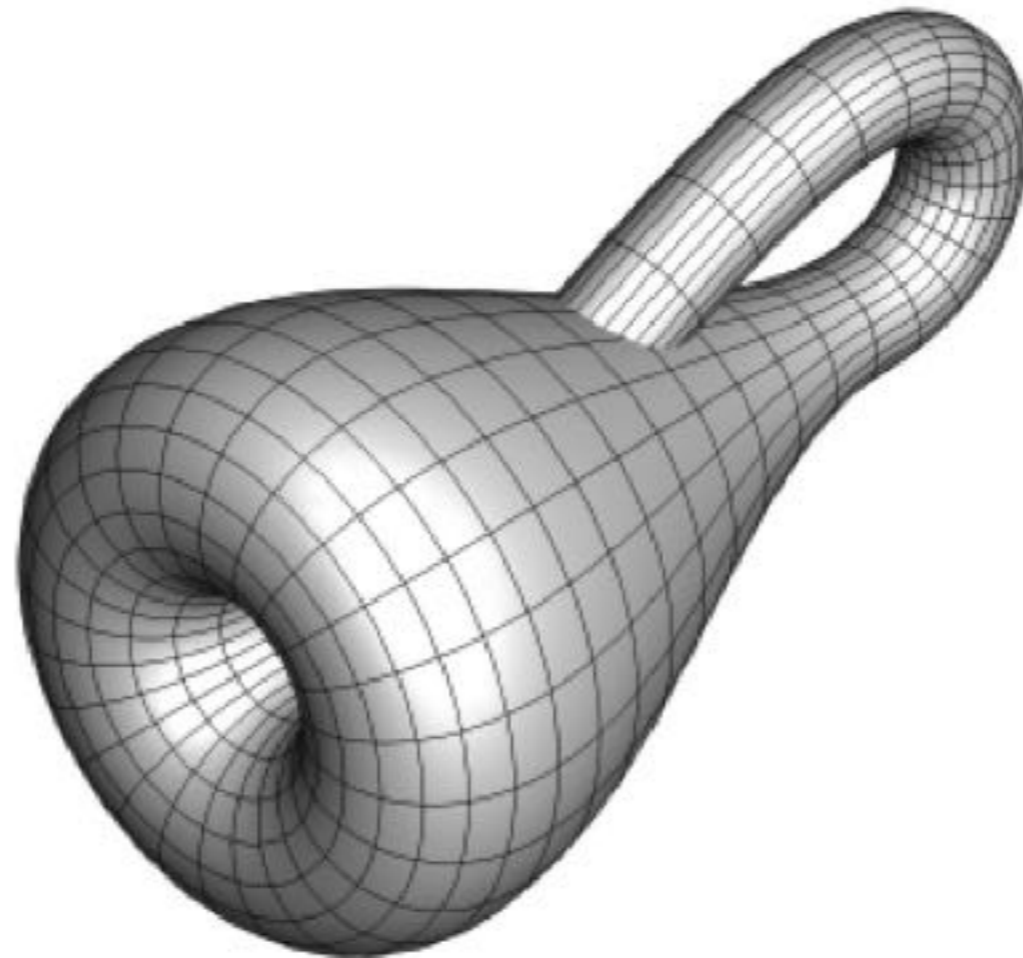


Abbiamo questo modello....possiamo associare altre forme?

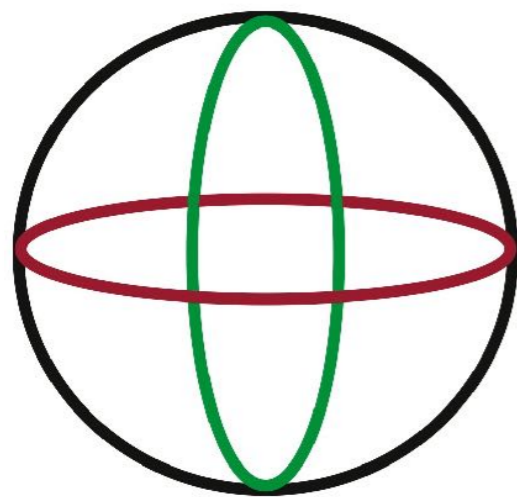
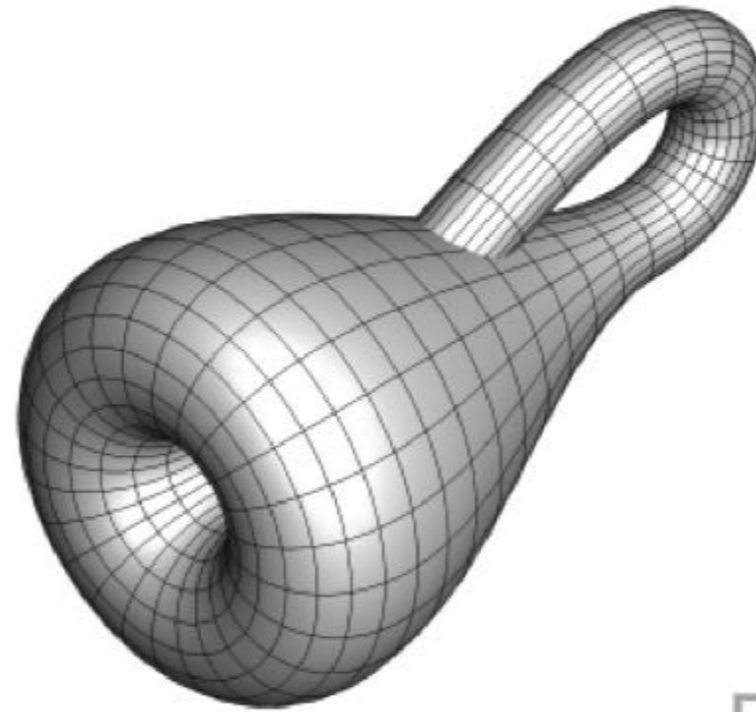


Three circle model

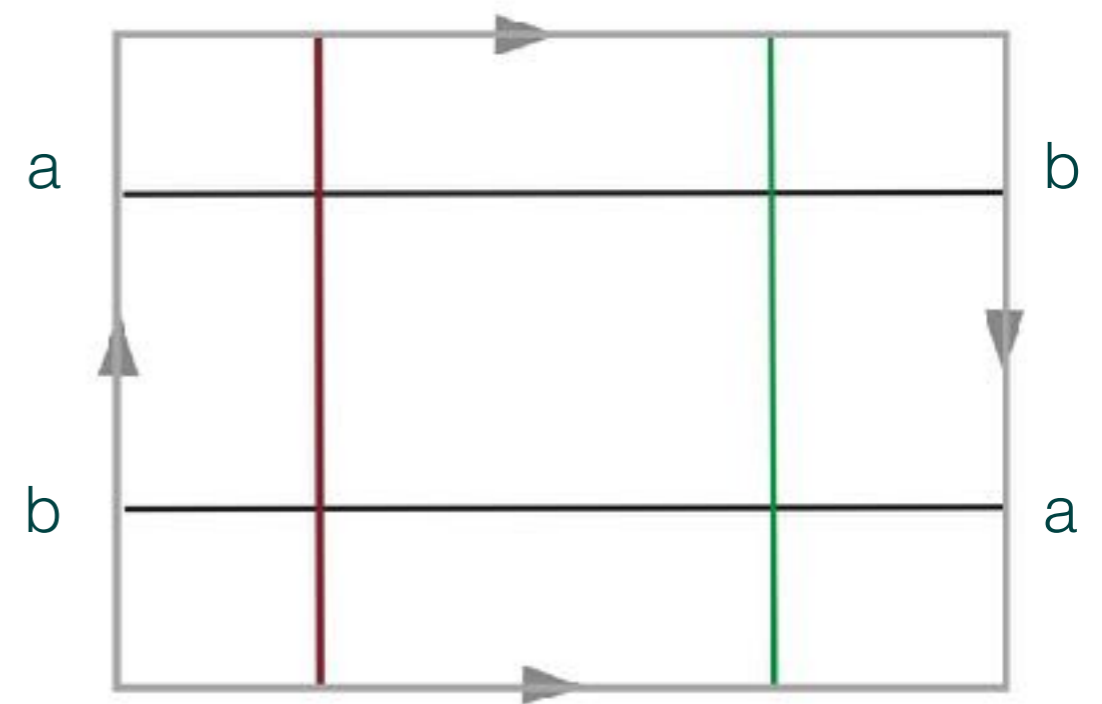
Abbiamo questo modello....possiamo associare altre forme? SI!



Bottiglia di Klein

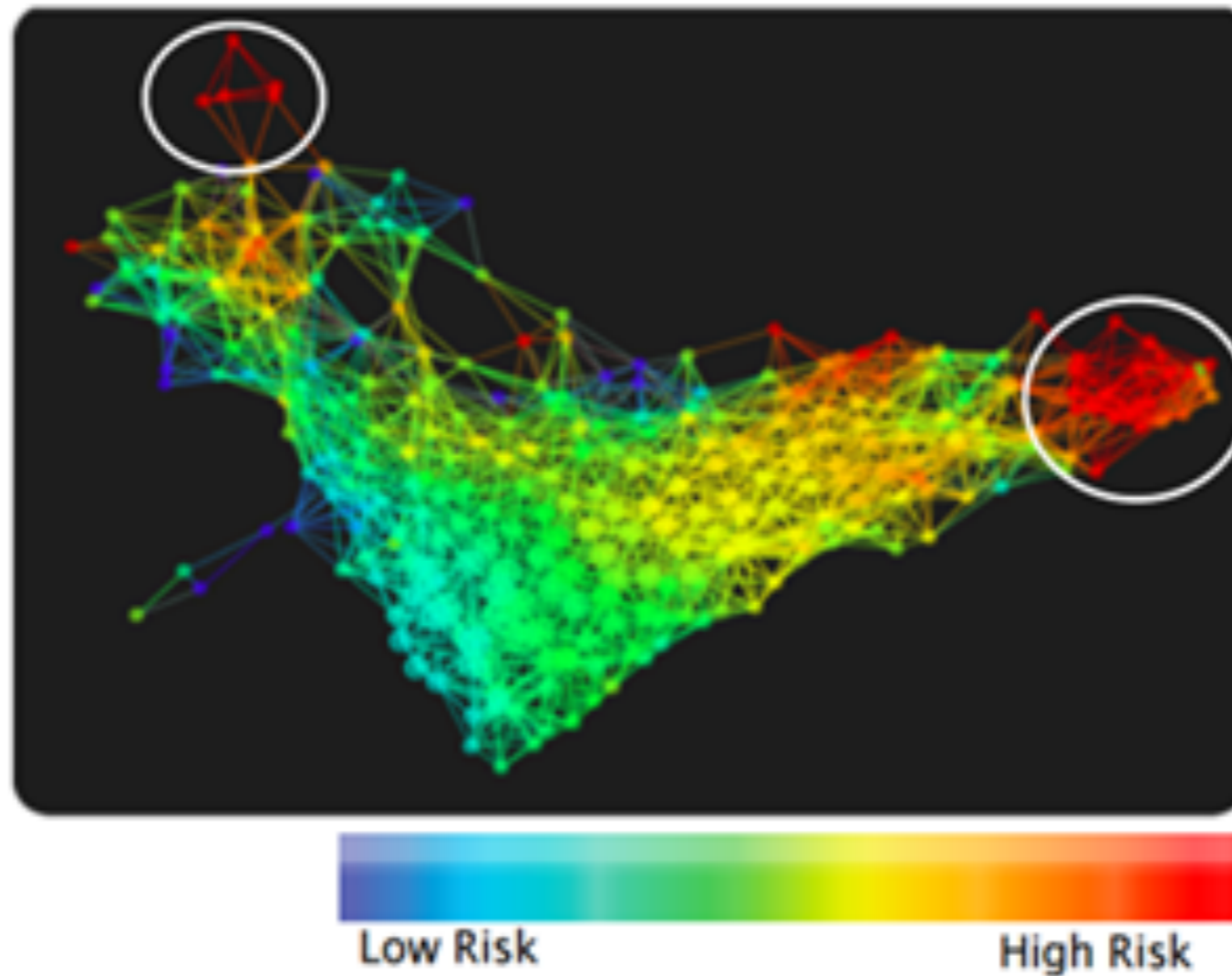


Three circle model



G. Carlsson e' uno dei pionieri della TDA (Topological Data Analysis) co-fondatore della AYASDI, che sviluppa software per l'analisi dei dati

Analisi del database di una banca, con circa 6 milioni di transazioni:



Grazie e Buon BGeeK!!

Donatella e Sabina